Gezeitenkräfte und Roche-Grenze

Markus Pössel

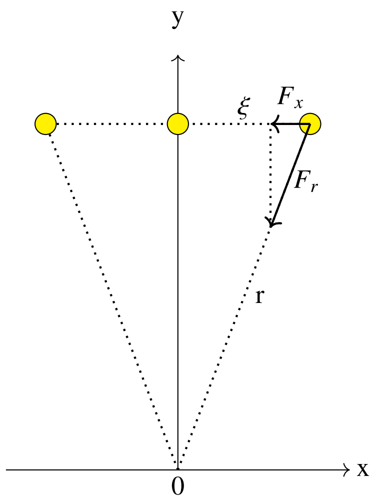
Handout zur Vorlesung „Das Sonnensystem und seine entfernten Verwandten für Nichtphysiker“ am 9.1.2023

In diesem Handout geht es zum einen um die Stärke von Gezeitenkräften — wir leiten die charakteristische Entfernungsabhängigkeit $1/r^3$ sowie die Abhängigkeit von der Ausdehnung des objekts bzw. vom Abstand der verschiedenen, relativ durch Gezeiten beschleunigten Objekte ab. Im zweiten Teil geht es auf dieser Grundlage um die Roche-Grenze.

1 Gezeitenkräfte

Im Vorbereitungsvideo hatten wir als Animation die folgende Veranschaulichung von Gezeitenkräften gesehen:

Aufgrund der unterschiedlich starken bzw. in unterschiedliche Richtungen wirkenden Gravitationskräfte verschiebt sich die zunächst symmetrische Anordnung fallender Bälle. Im folgenden wollen wir diese Gravitationskraft-Differenzen quantitativ beschreiben. Fangen wir mit den Bällen an, die horizontal gegenüber dem mittleren Ball verschoben sind.



Bei diesen beiden Bällen ist der Gezeiteneffekt geometrisch. Wie in der Abbildung links dargestellt fallen beide Bälle, die jeweils um ξ horizontal zur senkrechten y-Achse verschoben sind, auf den Massen-Mittelpunkt zu, der hier als Nullpunkt des Koordinatensystems gewählt wurde. Der radiale Abstand des rechten Balls vom Nullpunkt ist in erster Näherung gleich r, also gleich dem Abstand des mittleren Balls vom Nullpunkt.

Der Betrag der Gravitationskraft ist damit, entsprechend der üblichen Newtonschen Formel,

$$F_r = \frac{GMm}{r^2}. \tag{1}$$

Die Kraft wirkt radial, also zum Ursprung hin, wie in der Abbildung auch eingezeichnet ist. Diejenige Komponente der Kraft, welche den Ball rechts außen und den Ball in der Mitte horizontal aufeinander zu beschleunigt, ist das eingezeichnete F_x. Das rechtwinklige Dreieck mit den Seitenlängen r und ξ ist dabei ähnlich zu dem Dreieck mit den Seitenlängen F_r und F_x, so dass jene Kraftkomponenten zusammenhängen entsprechend

$$F_x = \frac{\xi}{r} \cdot F_r. \tag{2}$$

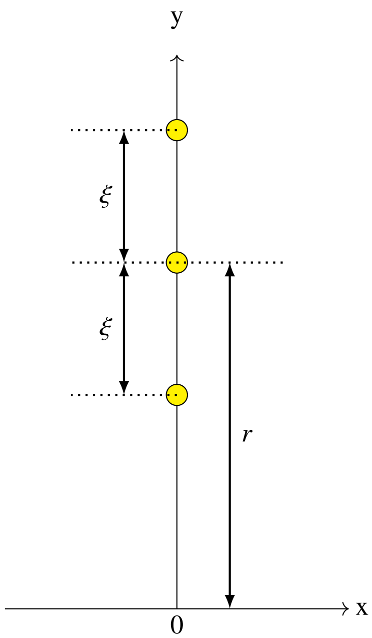
Setzen wir (1) in (2) ein so erhalten wir für die Stärke der Gezeitenkraft F_x den Ausdruck

$$F_x = \frac{GMm}{r^3} \cdot \xi. \tag{3}$$

Wie im Vorbereitungsvideo gesagt fällt diese Gezeitenkraft also mit zunehmendem Abstand schneller ab als die Gravitationskraft als Ganzes: $1/r^3$ im Gegensatz zur Newtonschen Gravitationskraft mit $1/r^2$. Auch die Proportionalität der Gezeitenkraft zum Abstand ξ, über den Hinweg sie wirkt, kann man an obiger Gleichung ablesen.

Schauen wir uns jetzt noch die andere Art von Gezeitenkraft an: Die für diejenigen Bälle in der Übersichtsabbildung auf Seite 1, bei denen sich die Gravitationskraft aufgrund des unterschiedlichen Abstands zur anziehenden Masse unterscheidet, nicht aufgrund der unterschiedlichen Richtung der Kräfte. In der Abbildung auf der nachfolgenden Seite links sind wiederum der Ball in der Mitte dargestellt, außerdem aber diesmal der Ball, der um ξ näher am und derjenige, der um ξ weiter entfernt vom Erdmittelpunkt dahinfällt.

Es ist klar, dass sich mit diesen unterschiedlichen Abständen vom Erdmittelpunkt auch die Stärke der Gravitationskraft ändert: Der weiter oben befindliche Ball wird schwächer angezogen als der mittlere Ball, der weiter unten befindliche Ball stärker als der mittlere Ball.



In Formeln ausgedrückt: Auf den mittleren Ball wirkt eine Newtonsche Gravitationskraft der Stärke (1), und auf den oberen bzw. den unteren Ball wirkt eine Gravitationskraft der Stärke

$$F_{r\pm} = \frac{GMm}{(r \pm \xi)^2}. \tag{4}$$

Die r-Abhängigkeit lässt sich umschreiben, weil in erster Näherung (anders gesagt, bis auf Terme ξ/r in quadratischer oder noch höhere Ordnung) gilt

$$\frac{1}{(r \pm \xi)^2} \approx \frac{1}{r^2}\left[1 \mp 2\frac{\xi}{r}\right]. \tag{5}$$

Im Physikstudium lernt man für solche Fälle sogenannte Taylor-Entwicklungen. Man kann sich aber auch direkt selbst davon überzeugen, dass die Formel stimmt, indem man einfach beide Seiten mit $(r \pm \xi)^2$ malnimmt und ausmultipliziert. Dann steht da

$$1 \approx 1 - 3\left(\frac{\xi}{r}\right)^2 + 2\left(\frac{\xi}{r}\right)^3. \tag{6}$$

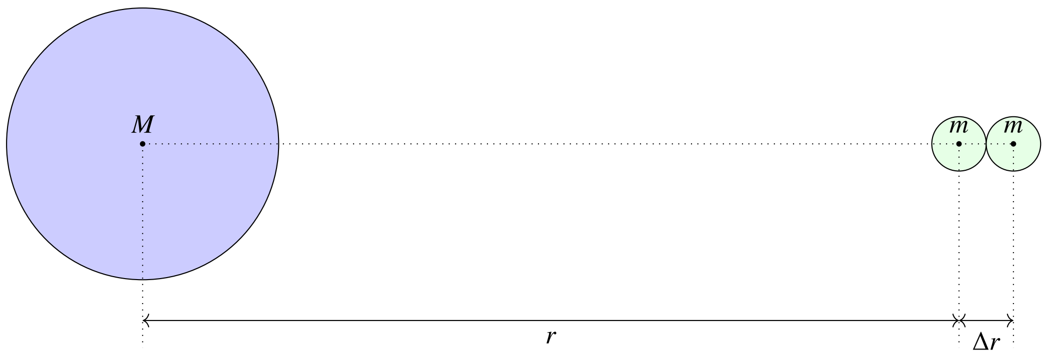
In erster Näherung, sprich: wenn wir Terme fortlassen, in denen ξ/r quadratisch oder in noch höherer Ordnung auftritt, ist diese Gleichung richtig. Die Beschleunigung, die aus der Newtonschen Kraft (1) folgt, spüren alle drei Bälle. Nur spüren oberer und unterer Ball eben noch eine kleine zusätzliche Beschleunigung, die sich aus der Differenz zwischen (4) und (1) ergibt. Diese Beschleunigungs-Differenz lässt die in der obigen Abbildung gezeigten drei Bälle aus Sicht eines Beobachters in der frei fallenden Kabine auseinanderwandern. Die Differenz ist die Gezeitenkraft F_y in y-Richtung,

$$F_y = -\frac{GMm}{(r \pm \xi)^2} + \frac{GMm}{r^2} = -\frac{GMm}{r^2}\left[1 \mp 2\frac{\xi}{r} - 1\right] = \pm 2\frac{GMm}{r^3}\xi. \tag{7}$$

Das ist, wie im Vorbereitungsvideo erwähnt, eine Kraft mit derselben Abhängigkeit von r und ξ wie bei der horizontalen Gezeitenkraft F_x, siehe Gl. (3). Lediglich der numerische Vorfaktor ist ein anderer. Das Vorzeichen bestimmt, in welche Richtung die Bälle beschleunigt werden: Der um $+\xi$ in y-Richtung verschobene, also weiter oben gelegene Ball, wird nach oben in y-Richtung beschleunigt, der um $-\xi$ verschobene untere Ball in negativer y-Richtung. Insgesamt ergibt sich das Auseinanderziehen in senkrechter Richtung, das im Video in der Animation zu sehen war und zur Spaghettifizierung von Astronaut*innen das in-die-Länge-ziehen beiträgt.

2 Roche-Grenze

Als nächstes können wir schauen, was Gezeitenkräfte der Stärke (7) für die Stabilität von Objekten bedeuten, die sich zu nahe an einen massereichen Körper heranwagen. In der einfachen Modellsituation besteht der Körper, dessen Stabilität wir bestimmen wollen, selbst nur aus zwei kleinen Massekugeln, die einerseits durch ihre wechselseitige Gravitation zueinander hin, andererseits durch die Gezeitenkraft einer in der Nähe befindlichen großen Masse voneinander weg gezogen werden. Hier ist eine Skizze der Situation:



Links ist die große Masse M, die beiden Massekugeln rechts haben jeweils die Masse m. Der Abstand des Mittelpunkts der inneren Massekugel vom Mittelpunkt der Masse M sei r. Der Mittelpunkt der äußeren Massekugel rechts ist um Δr weiter entfernt als das. Entsprechend der Formel (7) ist die Stärke der Gezeitenkraft, die versucht, die beiden Kugeln auseinanderzuziehen,

$$F_{\text{gez}} = \frac{2GMm}{r^3} \cdot \Delta r. \tag{8}$$

Die gegenseitige Anziehungskraft, die die beiden kleinen Massekugeln zueinander beschleunigt, ist dasselbe wie die Newtonsche Gravitationskraft zwischen zwei Punktmassen m im Abstand Δr, hat also die Stärke

$$F_A = \frac{Gm^2}{\Delta r^2}. \tag{9}$$

Unser Zwei-Kugel-Gebilde ist stabil, solange die Anziehungskraft stärker als die auseinanderziehende Gezeitenkraft ist,

$$F_A > F_{\text{gez}}. \tag{10}$$

Das lässt sich umschreiben zu einer Bedingung für den Abstand r, nämlich

$$r > r_R \equiv \Delta r \cdot \left(\frac{2M}{m}\right)^{1/3}, \tag{11}$$

wobei die rechte Seite hier eine erste Version der sogenannten Roche-Grenze r_R definiert. Kommt unser Zwei-Kugel-Gebilde der Masse M zu nahe, nämlich näher als die hier definierte Roche-Grenze, wird es zerrissen. Man kann die so definierte Roche-Grenze auch umschreiben über die mittlere Dichte und die Formel für Radius und Volumen einer Kugel. Bezeichnen wir den Radius der Kugelmasse M als R, nennen die mittlere Dichte der großen Kugel ρ_M und die der beiden kleinen Kugeln ρ_m, dann haben wir

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho_M \tag{12}$$

und

$$m = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\Delta r}{2}\right)^3 \cdot \rho_m, \tag{13}$$

mit dem Extrafaktor $1/2$ weil Δr ja gemäß der obigen Skizze das Doppelte des Radius jeder der kleinen Kugeln ist. Nutzt man diese Formeln, um M, m und Δr zu ersetzen, lautet die Roche-Grenze

$$r_R = R \cdot \left(\frac{16\rho_M}{\rho_m}\right)^{1/3} \approx 2.52 \cdot R \cdot \left(\frac{\rho_M}{\rho_m}\right)^{1/3}, \tag{14}$$

eine vergleichsweise einfache Formel. Die genauere Formel, die den kleineren Körper nicht als Doppel-Kugel modelliert sondern als deformierbares kugelförmiges Gebilde, führt auf dieselbe funktionale Abhängigkeit, aber einen anderen numerischen Vorfaktor, nämlich

$$r_R = 2.44 \cdot R \cdot \left(\frac{\rho_M}{\rho_m}\right)^{1/3}. \tag{15}$$