

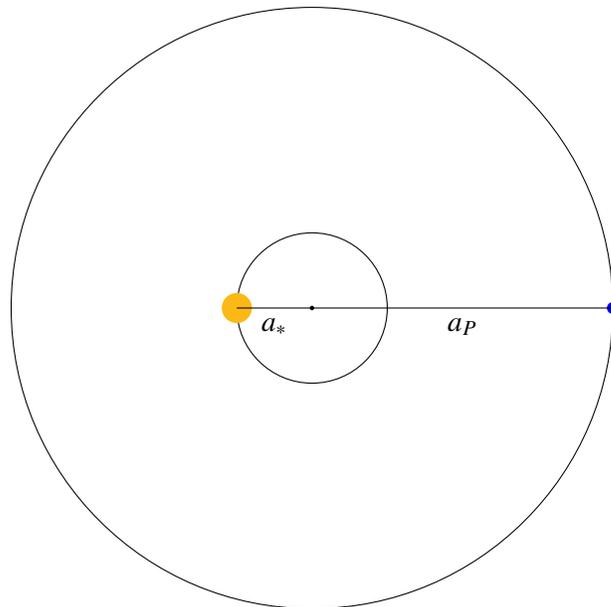
Handout zum Exoplaneten-Nachweis: Radialgeschwindigkeitsmethode und Transit-Methode

Markus Pössel

Sonnensystem für Nichtphysiker, WS 2022/2023

1 Stern und Planet

Betrachten wir einen Stern mit Masse M_* und einen Planeten mit Masse M_P , die sich umkreisen. Der Einfachheit halber mögen sich beide auf Kreisbahnen bewegen; die Geometrie ist hier „direkt von oben“ zu sehen:



Der (konstante) Abstand des Planeten vom Mittelpunkt des Systems sei dabei a_P , der Abstand des Sterns vom Systemmittelpunkt a_* . Stern und Planet stehen jeweils auf direkt gegenüberliegenden Seiten des Systemmittelpunkts, haben also insbesondere dieselbe Umlaufzeit P . Die Geschwindigkeiten von Stern und Planet ergeben sich damit zu

$$v_* = \frac{2\pi a_*}{P} \quad \text{und} \quad v_P = \frac{2\pi a_P}{P}, \quad (1)$$

jeweils als das Verhältnis der Bahnlänge (Kreisumfang) zur Umlaufzeit.

Die Stärke der Gravitationsanziehung zwischen den beiden Körpern ist nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz gegeben durch

$$F_G = \frac{GM_*M_P}{(a_* + a_P)^2}. \quad (2)$$

Die Bewegung auf der Kreisbahn bedeutet, dass der Stern eine (Zentripetal-)Beschleunigung hin zum Mittelpunkt erfährt, deren Stärke

$$b_{ZPS} = \frac{v_*^2}{a_*} = 4\pi^2 \frac{a_*}{P^2} \quad (3)$$

ist. Diese Beschleunigung wird durch die Gravitationskraft hervorgerufen; es muss also gelten

$$4\pi^2 \frac{a_*}{P} = \frac{1}{M_*} \frac{GM_* M_P}{(a_* + a_P)^2}, \quad (4)$$

also

$$a_* M_* = \frac{P^2}{4\pi^2} \frac{GM_* M_P}{(a_* + a_P)^2}. \quad (5)$$

Dieselbe Ableitung können wir für den Planeten vornehmen; auch für den Planeten muss gelten

$$a_P M_P = \frac{P^2}{4\pi^2} \frac{GM_* M_P}{(a_* + a_P)^2}. \quad (6)$$

Als erstes Ergebnis erhalten wir also schon einmal

$$a_* M_* = a_P M_P. \quad (7)$$

Das bestätigt, was wir uns auch anderweitig hätten denken können: dass nämlich Stern und Planet um den gemeinsamen Massenschwerpunkt kreisen, und dass ihre Abstände von jenem Schwerpunkt sich umgekehrt proportional zu ihren Massen verhalten,

$$\frac{a_*}{a_P} = \frac{M_P}{M_*} \quad (8)$$

— ganz analog zu zwei Menschen auf einer Wippe, bei denen im Gleichgewichtszustand der massereichere Mensch schließlich auch näher an der Wippachse sitzen muss.

Auch das dritte Keplersche Gesetz für die hier betrachtete Situation können wir ableiten. Dazu teilen wir Gleichung (5) durch M_* und Gleichung (6) durch M_P , zählen die Ergebnisse zusammen und erhalten auf diese Weise

$$a_* + a_P = \frac{P^2}{4\pi^2} \frac{G(M_* + M_P)}{(a_* + a_P)^2}, \quad (9)$$

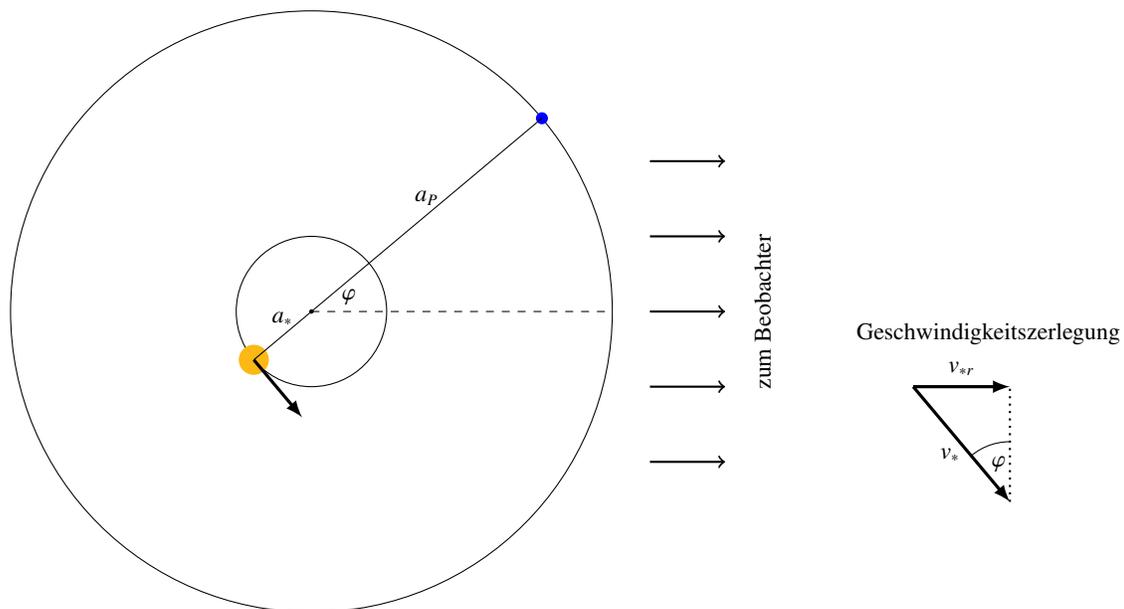
was sich direkt umschreiben lässt zu

$$(a_* + a_P)^3 = \frac{G(M_* + M_P)}{4\pi^2} P^2, \quad (10)$$

als die hier anwendbare Form des dritten Keplerschen Gesetzes.

2 Radialgeschwindigkeit

Die Radialgeschwindigkeit des Sterns können wir über den Dopplereffekt messen — klar definierte Spektrallinien des Sterns verschieben sich hin zum roten Bereich, wenn sich der Stern von uns entfernt, und zum blauen Bereich, wenn er auf uns zu kommt. Würden wir direkt von der Seite auf die Bahnebene des Systems sehen, dann würde die Radialgeschwindigkeit lediglich von der Bahngeschwindigkeit v_* des Sterns und vom Positionswinkel abhängen, wie die folgende Skizze zeigt:



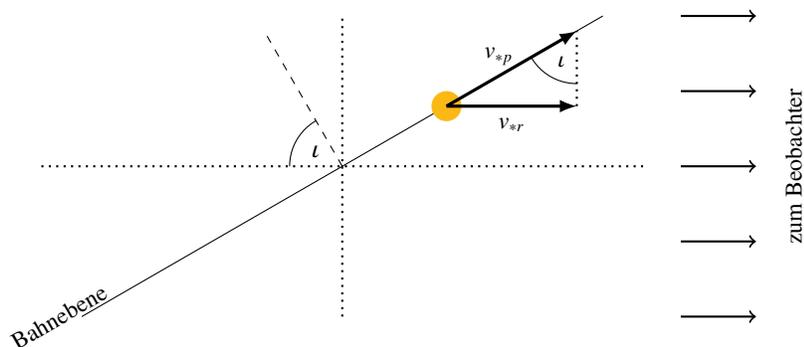
Der Beobachter ist in dieser Skizze weit entfernt auf der rechten Seite. Die Radialgeschwindigkeit des Sterns v_{*r} ist die Geschwindigkeit des Sterns, projiziert auf die Richtung vom Systemmittelpunkt zum Beobachter; in unserer Skizze ist das die waagerechte Richtung. Wie die Geschwindigkeitszerlegung im rechten Teil der Skizze zeigt, ist

$$v_{*r} = v_* \cdot \sin(\varphi). \quad (11)$$

Der Positionswinkel φ verändert sich mit der Zeit als

$$\varphi(t) = \frac{2\pi}{P} \cdot t + \varphi_0, \quad (12)$$

und entsprechend verändert sich auch die Radialgeschwindigkeit kosinusartig mit der Zeit. Das gilt allerdings in der hier angegebenen Form nur, wenn der Beobachter die Umlaufebene tatsächlich genau von der Seite aus betrachtet. Ist die Umlaufebene geneigt, dann kommt ein weiterer (konstanter) geometrischer Faktor hinzu. Die folgende Abbildung zeigt die Umlaufebene und die Richtung hin zum Beobachter von der Seite. Der Winkel ι (Iota) heißt *Inklination(swinkel)* oder *Bahnneigung(swinkel)*.



Für $\iota = 90^\circ$ sieht der Beobachter direkt von der Kante auf die Umlaufebene, für $\iota = 0^\circ$ direkt (“face on”) auf die Ebene.

Das v_{*p} ist die Geschwindigkeitskomponente in der Umlaufebene. Wie das Vektordiagramm zeigt, ergibt sich durch die Bahnneigung ein weiterer Faktor $\sin \iota$. Insgesamt ergibt sich für die Radialgeschwindigkeit der Verlauf

$$v_{*r} = v_* \sin \left[\frac{2\pi}{P} \cdot t + \varphi_0 \right] \cdot \sin \iota. \quad (13)$$

3 Radialgeschwindigkeitsmethode

Aus großer Entfernung können wir kein aufgelöstes Bild des Systems gewinnen, also kein Bild, auf dem der Stern, der Planet und deren Abstand zueinander direkt sichtbar wären. Stattdessen können wir lediglich Messungen am Stern selbst vornehmen; der Planet ist in den meisten Fällen beim heutigen Stand der Technik unsichtbar (Standardbeispiel: die Helligkeitsverhältnisse sind so, als wolle man ein Glühwürmchen direkt neben einem Stadionscheinwerfer aus einigen Kilometern Entfernung nachweisen).

In einer ganzen Reihe von Fällen lässt sich die Radialgeschwindigkeit des Sterns über den Dopplereffekt nachweisen, also denjenigen Anteil seiner Bewegung, der den Stern direkt auf uns zu oder direkt von uns weg führt. Die Radialgeschwindigkeit wird sich im einfachsten Falle, wo nur ein Planet anwesend ist, periodisch verändern. Bereits daraus können wir eine wichtige Beobachtungsgröße bestimmen, nämlich die Umlaufzeit P .

Die Radialgeschwindigkeitsmethode zum Nachweis von Exoplaneten macht sich genau diesen Umstand zunutze. Über den Dopplereffekt lässt sich der Geschwindigkeitsverlauf (13) rekonstruieren und damit auch die Größe $v_* \cdot \sin \iota$.

Sie können die grundlegende Situation hier interaktiv anschauen, dabei die entscheidenden Parameter verändern und schauen, was sich dadurch für die Radialgeschwindigkeitskurve ändert:

<https://astro-apps.org/RadialVelocityMethod/index.html>

Für die Analyse ist wichtig, dass wir v_* direkt durch geeignete Kenngrößen des Systems ausdrücken. Aus (8) folgt

$$(a_* + a_p) = \frac{a_*}{M_p} (M_* + M_p). \quad (14)$$

Die Größe a_* können wir durch v_* ersetzen, siehe Gleichung (1). Eingesetzt in das dritte Keplersche Gesetz (10) erhalten wir

$$v_* = \left(\frac{2\pi G}{P} \right)^{1/3} \frac{M_p}{(M_* + M_p)^{2/3}}. \quad (15)$$

Wir können diesen Ausdruck umschreiben, so dass die Größenordnungen klarer werden:

$$v_* \approx 100 \text{ m/s} \left(\frac{M_p}{M_J} \right) \cdot \left(\frac{10 \text{ Tage}}{P} \right)^{1/3} \cdot \left(\frac{M_* + M_p}{M_\odot} \right)^{-2/3} \quad (16)$$

$$\approx 10 \text{ cm/s} \left(\frac{M_p}{M_\oplus} \right) \cdot \left(\frac{1 \text{ Jahr}}{P} \right)^{1/3} \cdot \left(\frac{M_* + M_p}{M_\odot} \right)^{-2/3}. \quad (17)$$

Dabei ist M_J die Jupitermasse und M_\oplus die Erdmasse. Die besten heutigen Spektrografen können Radialgeschwindigkeiten von ~ 1 m/s nachweisen (HARPS, CARMENES). Kein Wunder, dass man auf diese Weise anfangs so viele heiße (=ihrem Stern nahe) Jupiter gefunden hat.

Indem man den zeitlichen Verlauf der Radialgeschwindigkeit (13) verfolgt, kann man die Amplitude $v_{*a} = v_* \cdot \sin i$ bestimmen. Das wiederum lässt sich mit der Formel (15) auflösen zu

$$M_P \cdot \sin i = v_{*a} \cdot (M_* + M_P)^{2/3} \left(\frac{P}{2\pi G} \right)^{1/3} \approx v_{*a} \cdot M_*^{2/3} \left(\frac{P}{2\pi G} \right)^{1/3}. \quad (18)$$

Die letzte Näherung können wir vornehmen, weil Planetenmassen typischerweise sehr viel kleiner sind als Sternmassen. (In unserem Sonnensystem besitzt die Sonne mehr als tausend Jupitermassen.) v_{*a} und P lassen sich messen. Aus dem Spektrum eines (Hauptreihen-)Sterns lässt sich seine Masse erschließen.

Mit Hilfe der Radialgeschwindigkeitsmethode ergibt sich dementsprechend eine Abschätzung für $M_P \cdot \sin i$. Da $\sin i$ zwischen 0 und 1 liegt, setzt $M_P \cdot \sin i$ eine Untergrenze für die Planetenmasse M_P .

4 Transit-Methode

Bei der Transitmethode beobachten wir anhand von Helligkeitsveränderungen indirekt, wie sich ein Planet auf seiner Umlaufbahn von der Erde aus gesehen immer einmal wieder direkt vor seinen Stern schiebt.

Die grundlegende Situation können Sie in der folgenden App interaktiv erkunden und dort jeweils sehen, wie sich die Transit-Lichtkurve verändert, wenn Sie die Parameter des Systems verändern:

<https://astro-apps.org/TransitMethod/index.html>

Die folgenden quantitativen Betrachtungen präsentieren die Rechnungen in dem Artikel [Seager und Mallén-Ornelas 2002](#) in vereinfachter Form. Die erste Formel, die die Parameter verknüpft, ist einfach: Außer in ungewöhnlichen Fällen schiebt sich das Planetenscheibchen von der Erde aus gesehen während des Transits komplett vor das Sternscheibchen. In der Transitkurve ist dieser Zustand daran zu erkennen, dass die Transitkurve bei ihrem Minimum flach wird — wo das der Fall ist, ist der Planet komplett vor dem Stern. In erster Näherung und unter der Annahme, dass jede Region der Sternscheibe für uns gleich hell ist (was in Wirklichkeit aufgrund der Randverdunklung nicht der Fall ist) ist der Bruchteil ΔF , um den sich der Strahlungsfluß F ohne Planet durch die Abschattung vermindert, also

$$\Delta F = \frac{F_{\text{ohne Transit}} - F_{\text{während Transit}}}{F_{\text{ohne Transit}}} \quad (19)$$

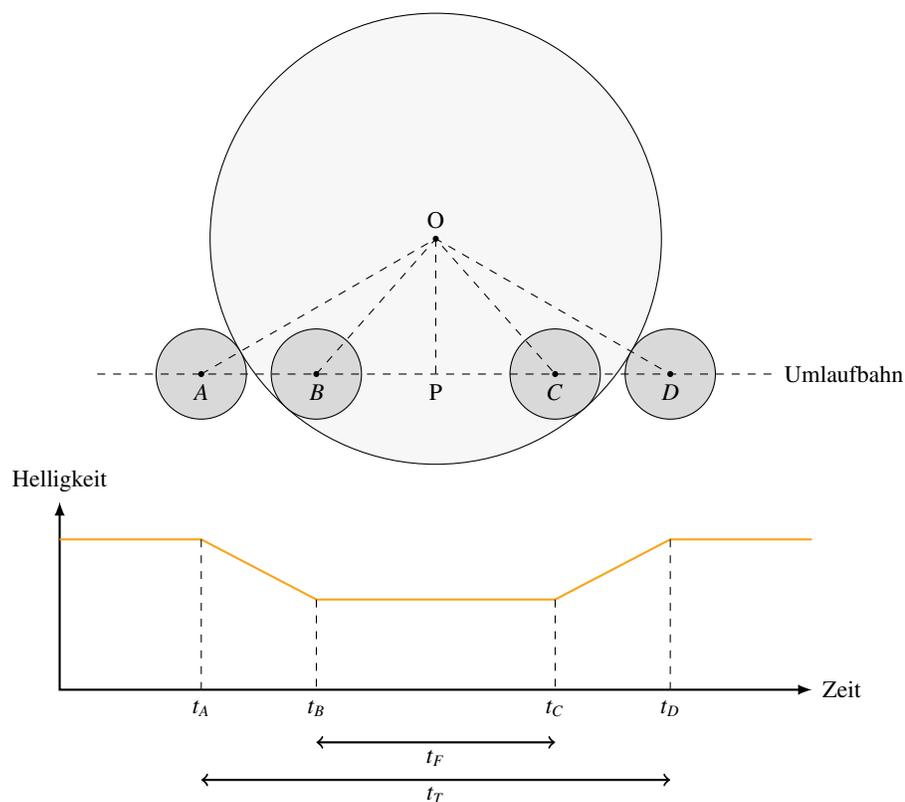
gerade

$$\Delta F = \left(\frac{R_P}{R_*} \right)^2, \quad (20)$$

mit R_P dem Planetenradius und R_* dem Sternradius. Das ist gerade das Verhältnis der Querschnittsfläche πR_P^2 des Planeten zur Querschnittsfläche πR_*^2 des Sterns und damit

dem Verhältnis des durch den Planeten abgeschatteten Teils der Stern-Querschnittfläche zur gesamten Stern-Querschnittfläche. Der Sternradius lässt sich nun aber, wenn man das Spektrum und damit den Typ des Sterns kennt, aus den gängigen Modellen des Sternaufbaus erschließen. Die Helligkeitsmessung und Formel (20) ergeben dann direkt den Planetenradius R_P .

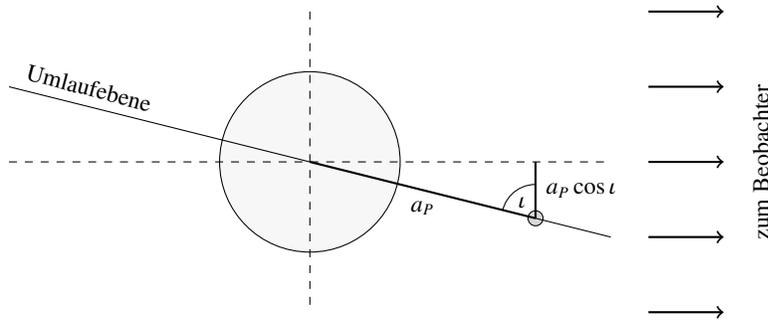
Aus der Länge der beiden Übergangsphasen und der Minimumsphase lassen sich noch weitere Schlüsse ziehen. Die folgende Skizze zeigt das Planetenscheibchen in unterschiedlichen Positionen vor dem Sternscheibchen — wohlgemerkt etwas, das wir bei wirklichen Exoplaneten nicht im Detail sehen; dort können wir nur aus der Lichtkurve schließen, was vor sich geht:



In dieser Abbildung sehen wir im oberen Teil den Anblick, der sich von der Erde aus bieten würden, wenn wir ein extrem hochauflösendes Teleskop hätten – das (hellere) Sternscheibchen und darunter vier Positionen A , B , C und D des Planetenscheibchens, die der Planet mit der Zeit von links nach rechts durchläuft. Im unteren Teil ist die Lichtkurve abgebildet, also wie sich die Helligkeit des Sterns aus unserer Perspektive mit der Zeit verändert. Die Zeitpunkte, zu denen das Planetenscheibchen sich in der Position A , bei B , bei C bzw. bei D befindet sind ebenfalls eingezeichnet. Qualitativ ist die Kurve einfach zu verstehen: Vor Erreichen der Position A hat der Stern seine normale Helligkeit. Ab Position A beginnt das Planetenscheibchen zu schieben, die Helligkeit nimmt ab — um einen Betrag, der hier der Deutlichkeit halber um den Faktor 10 übertrieben ist. Ab Position B ist das Planetenscheibchen dann vollständig vor dem Sternscheibchen, und die Phase geringster Helligkeit hat begonnen. Sie dauert bis zur Position C , ab der das Planetenscheibchen zu einem immer geringeren Teil vor dem

Sternscheibchen steht, bis es bei Position D gar keine Region des Sternscheibchens mehr verdeckt, und der Stern entsprechend zur Ursprungshelligkeit zurückgekehrt ist.

Mit einfacher Dreiecksrechnung können wir das, was da passiert, aber auch quantitativ beschreiben. Das Umlaufbahnstück von Position A bis Position D können wir dabei getrost als Gerade annähern, die durch die Inklination ι ohne Veränderung der Länge vor dem Sternscheibchen etwas nach oben oder nach unten parallelverschoben wird. Berechnen wir zuerst die (räumlichen) Abstände der Positionen des Planetenscheibchen-Mittelpunkts vom Referenzpunkt P . Das Dreieck $\triangle APO$ ist rechtwinklig. Die Länge der Kathete OP ist $\overline{OP} = a_P \cos \iota$, mit a_P dem Radius der Kreisbahn des Planeten und ι der Inklination relativ zu irdischen Beobachter*innen. Das sieht man am einfachsten, wenn man sich die Situation von Stern und Planet von der Seite anschaut, wie hier schematisch dargestellt:



Die Strecke von O nach A entspricht dem Stern(scheibchen)radius plus dem Planeten(scheibchen)radius, also $\overline{OAE} = R_* + R_P$. Damit sind zwei der Seitenlängen des rechtwinkligen Dreiecks bekannt, und wir können die dritte mit dem Satz des Pythagoras berechnen, nämlich

$$\overline{PA} = \sqrt{(R_* + R_P)^2 - (a_P \cos \iota)^2}. \quad (21)$$

Andererseits ist aufgrund der Symmetrie $\overline{PD} = \overline{PA}$. Analog kann man für das rechtwinklige Dreieck $\triangle BPO$ ausrechnen, dass

$$\overline{PB} = \sqrt{(R_* - R_P)^2 - (a_P \cos \iota)^2}. \quad (22)$$

Wiederum gilt natürlich aufgrund der Symmetrie $\overline{PB} = \overline{PC}$. Das flache Stück der Lichtkurve, zwischen den Positionen B und C , wird in der Zeit t_F durchlaufen. Das entspricht der Länge entlang der Umlaufbahn von

$$\overline{BC} = \overline{PB} + \overline{PC} = 2 \sqrt{(R_* - R_P)^2 - (a_P \cos \iota)^2}. \quad (23)$$

Bei einer Kreisbahn — und der Einfachheit halber betrachten wir in dieser Handreichung nur Kreisbahnen — ist die Bahngeschwindigkeit konstant, nämlich das v_P aus Formel (1), $v_P = 2\pi a_P/P$. Die Strecke \overline{BC} wird also in der Zeit

$$t_F = \frac{\overline{BC}}{v_P} = \frac{P}{\pi a_P} \sqrt{(R_* - R_P)^2 - (a_P \cos \iota)^2} = \frac{PR_*}{\pi a_P} \sqrt{\left(1 - \frac{R_P}{R_*}\right)^2 - \left(\frac{a_P}{R_*} \cos \iota\right)^2} \quad (24)$$

durchlaufen. Ganz analog kann man für die totale Transitzeit t_T zeigen, dass

$$t_T = \frac{\overline{BC}}{v_P} = \frac{P}{\pi a_P} \sqrt{(R_* + R_P)^2 - (a_P \cos \iota)^2} = \frac{PR_*}{\pi a_P} \sqrt{\left(1 + \frac{R_P}{R_*}\right)^2 - \left(\frac{a_P}{R_*} \cos \iota\right)^2} \quad (25)$$

gilt. Nun wissen wir aber aus (20), dass $R_P/R_* = \sqrt{\Delta F}$. Indem wir t_F^2 von t_T^2 abziehen eliminieren wir den einzigen Ausdruck in jener Kombination, der von der Inklination ι abhing. Der Rest ist dann einfach so umzustellen, dass wir a_P/R_* erhalten. Das Ergebnis ist

$$\frac{a_P}{R_*} = \frac{2P}{\pi} \frac{\Delta F^{1/4}}{\sqrt{t_T^2 - t_F^2}}. \quad (26)$$

Auf der rechten Seite stehen jetzt nur noch beobachtbare Größen. Den Sternradius R_* erhält man, wie oben schon erwähnt, aus Sternspektrum und Sternmodellen. Für Transitplaneten kann man auf diese Weise also den Umlaufbahnradius — bzw. bei komplizierterer Auswertung einer elliptischen Bahn: die große Halbachse — a_P bestimmen.

Ohne Rückgriff auf Sternmodelle bekommt man aus den obigen Formeln immerhin ganz direkt die Dichte des Sterns heraus. Für $M_* \gg M_P$, was ja in solch einer Situation zutrifft, wird (10) zu

$$a_P^3 = \frac{GM_*}{4\pi^2} P^2. \quad (27)$$

Wenn wir in dieser Gleichung a_P mit Hilfe der Formel (26) ersetzen, erhalten wir für die mittlere Dichte

$$\rho_* \equiv \frac{M_*}{\frac{4}{3}\pi R_*^3} = \frac{24P}{G\pi^2} \frac{\Delta F^{3/4}}{(t_T^2 - t_F^2)^{3/2}}. \quad (28)$$

Dort stehen auf der rechten Seite dann wiederum nur beobachtbare Größen — die mittlere Dichte des Sterns können wir also alleine aus Beobachtungen bestimmen!