

# Physik stabiler Planeten

Das Sonnensystem und seine nächsten Verwandten

**Markus Pössel**

Haus der Astronomie

27.11.2018

# Aktueller Einschub: Mars InSight

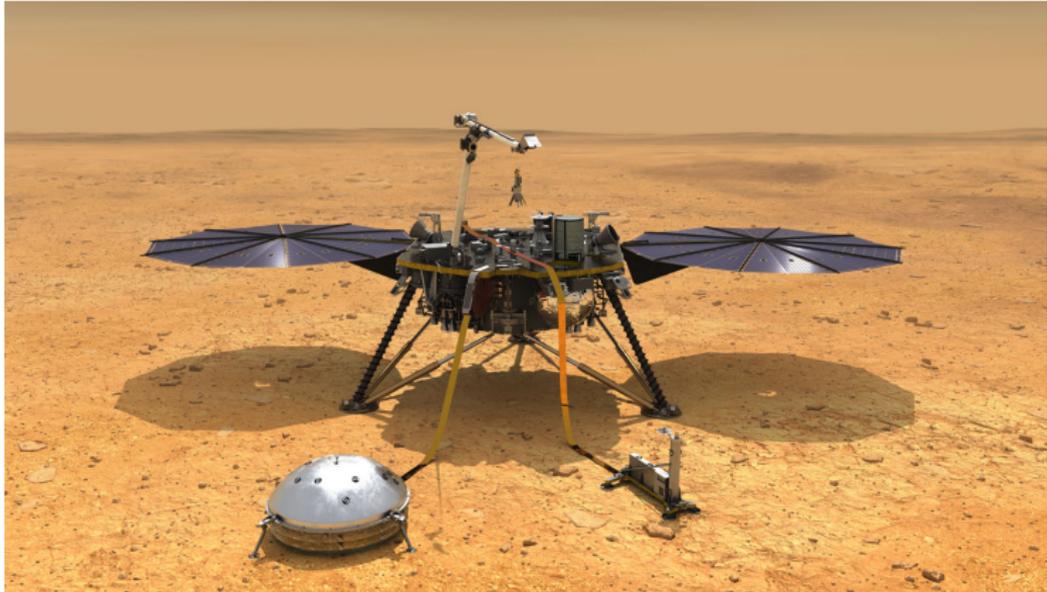


Bild: NASA/JPL

Landung am 26. November um 20:53 MEZ

# Aktueller Einschub: Mars InSight

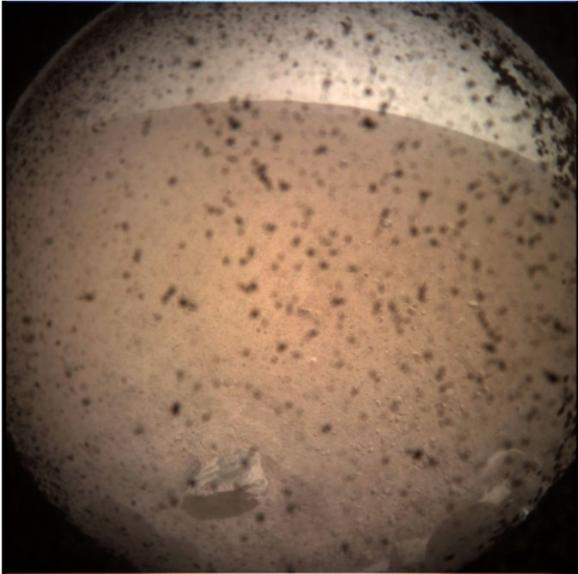


Bild: NASA / JPL-Caltech

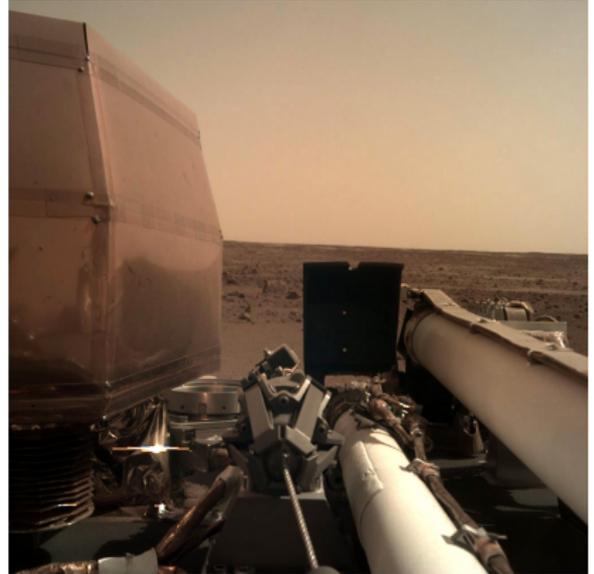


Bild: NASA / JPL-Caltech

# Planeteneigenschaften erklären

Warum sind Planeten, wie sie sind?

(Allgemein und im Einzelnen?)

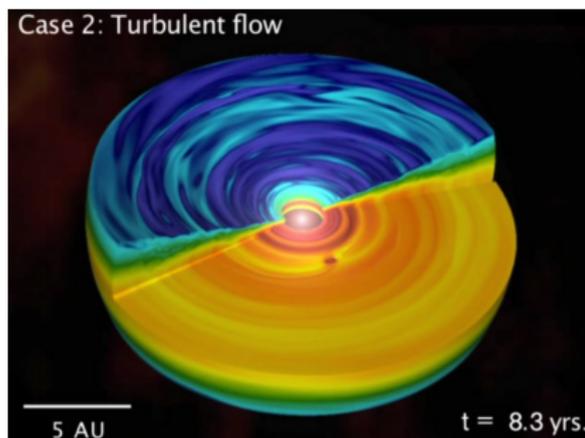


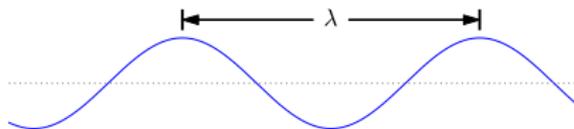
Bild: Uribe, Klahr, Henning (MPIA)

- Entstehung verstehen (letzte Vorlesungen)
- Physikalische Randbedingungen verstehen

# Vom Atom zum Festkörper

[nach Victor Weisskopf, „Of Atoms, Mountains and Stars“ in Science 187 (1975), 605– 612]

Für Quantenteilchen (Elektronen, Protonen, ...) gilt wie für Licht:  
Welle *und* Teilchen.



Energie-Gleichung:

$$E = h\nu$$

Impuls-Gleichung:

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

# Vom Atom zum Festkörper

Grundfrage: Was passiert, wenn man Quantenteilchen einsperrt/lokalisiert?

Vereinfacht: Größte Wellenlänge, die man in eine Zelle der Größe  $d$  einsperren kann, ist  $\lambda = 2d$ .

(Genauer: Potentielle Energie, Potentialtöpfe mit Randbedingungen)

# Vom Atom zum Festkörper: Minimal-Energie

Auf Region der Ausdehnung  $d$  lokalisiertes Teilchen der Masse  $m$  hat Maximal-Wellenlänge

$$\lambda_{max} = 2d,$$

daher einen Minimal-Impuls und daraus folgende eine minimale (kinetische) Energie

$$E_{kin,min} \sim \frac{h^2}{md^2}.$$

(numerische Vorfaktoren bei solchen Rechnungen nicht allzu ernst nehmen)

# Vom Atom zum Festkörper: Teilchendruck

Allgemeine Definition von Druck  $P$ : mit  $V$  Volumen und  $E$  (innerer) Energie z.B. eines Gases gilt

$$\Delta E = -P \cdot \Delta V \quad \Rightarrow \quad P = -\frac{dE}{dV}.$$

Ausgerechnet:

$$P \sim \frac{h^2}{m} \cdot V^{-5/3} = \frac{h^2}{m d^5}.$$

# Entartungsdruck von Quanten

**Pauli-Prinzip:** Zwei Teilchen können nicht in exakt dem gleichen Quantenzustand sein.

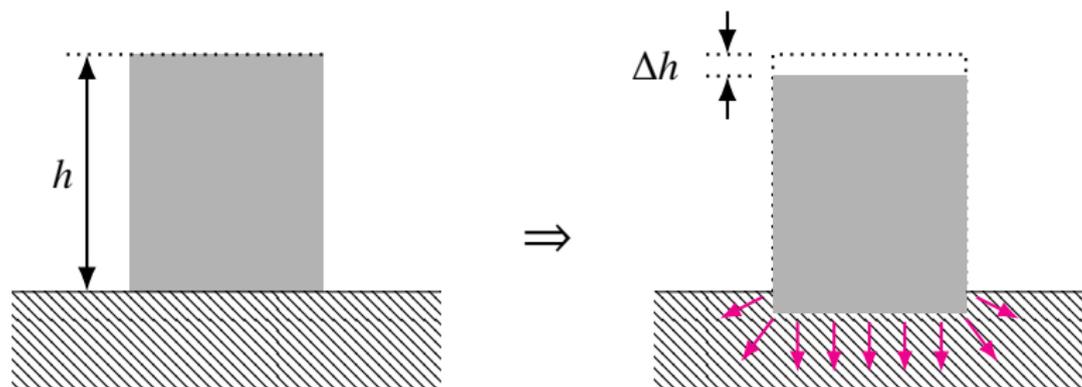
Vereinfachte Vorstellung:  $N$  Teilchen in einem Volumen  $V \Rightarrow$  jedes Teilchen bekommt sein eigenes privates Volumen  $\nu = V/N$ .

Entartungsdruck: Mit  $\nu = d^3$ ,

$$P_E \sim \frac{h^2}{m} \left( \frac{N}{V} \right)^{5/3}$$

$$\left[ \text{Exakte Rechnung: } P_E = \frac{3^{2/3}}{20 \pi^{4/3}} \cdot \frac{h^2}{m} \left( \frac{N}{V} \right)^{5/3} \approx 0.05 \frac{h^2}{m} \left( \frac{N}{V} \right)^{5/3} \right]$$

# Energetik einsackender Berge

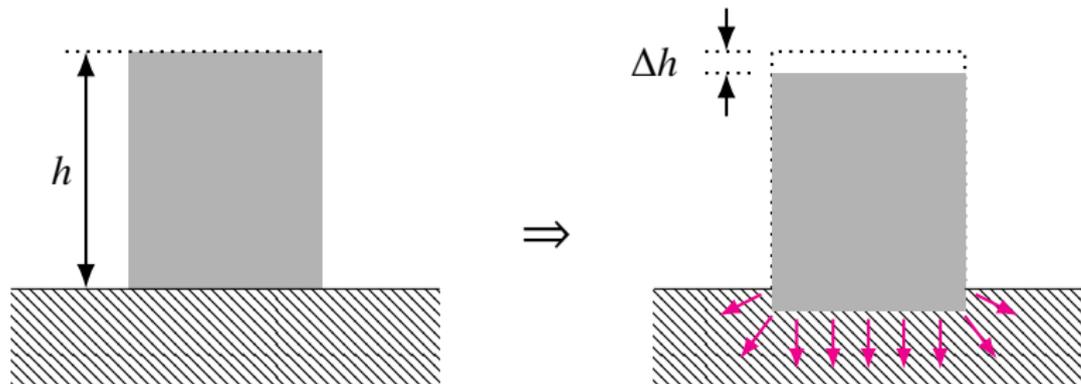


Wenn Berg der Höhe  $h$  und Grundfläche  $F$  um  $\Delta h$  in den Boden versinkt:

Potentielle Energiedifferenz  $\Delta E_{pot} = \Delta m \cdot g \cdot h = \rho F \Delta h \cdot g \cdot h$

mit  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  der Schwerebeschleunigung auf der Erdoberfläche.

# Energetik einsackender Berge



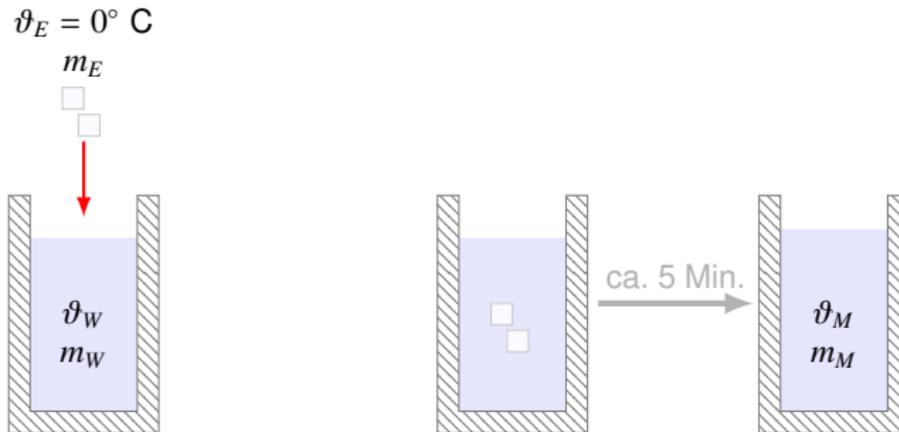
Energie nötig, um an der Basis Volumen von  $F \cdot \Delta h$  zu verflüssigen, um es aus dem Weg zu räumen: Schmelzwärme (Schmelzenthalpie)

$$\Delta E_{form} = h_{schm} \cdot \Delta m$$

mit  $h_{schm}$  der spezifischen Schmelzenthalpie  
(= für's Schmelzen benötigte Energie pro Masseneinheit)

# Spezifische Schmelzenthalpie bestimmen

Modellfestkörper: Eis (vor dem Einwerfen liegen lassen und abtrocknen)



Wärmegleichgewicht: Wasser gibt Energie an Eiskwürfel ab, bei spezifischer Wärmekapazität  $c_W$ :

$$c_W \cdot m_W (\vartheta_W - \vartheta_M) = h_{schm,Eis} \cdot m_E + c_W \cdot m_E (\vartheta_M - 0^\circ \text{C})$$

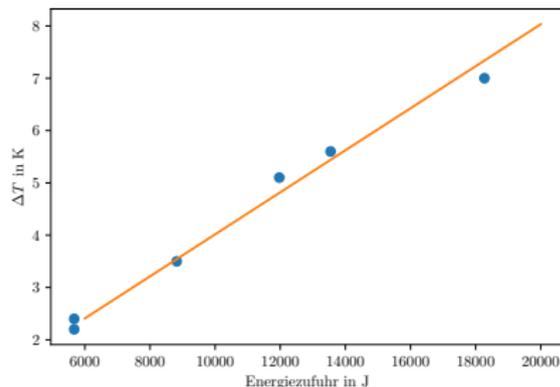
# Spezifische Schmelzenthalpie bestimmen



$$m_W = 475 \text{ g}, m_E = 22 \text{ g}, \vartheta_W = 23.4^\circ\text{C}, \vartheta_M = 19.5^\circ\text{C}$$

$$\Rightarrow h_{schm,Eis}/c_W = \frac{m_W}{m_E}(\vartheta_W - \vartheta_M) - \vartheta_M = 64.7 \text{ K}$$

# Spezifische Wärmekapazität bestimmen

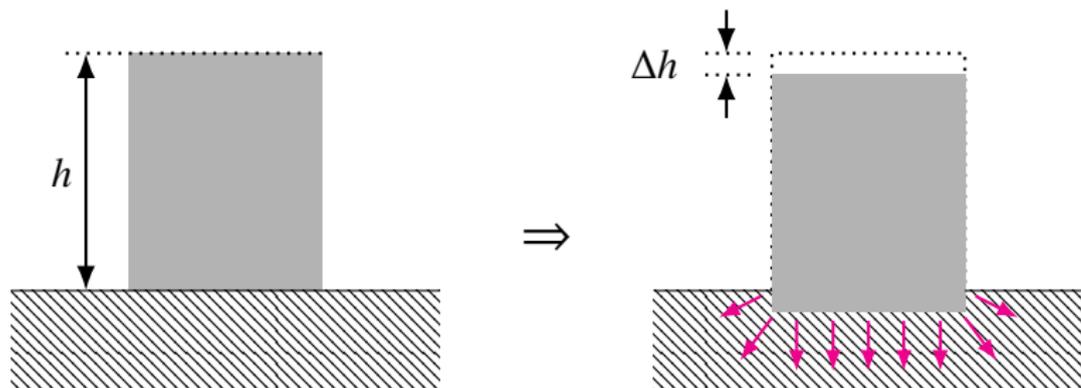


$$\Rightarrow c_W = 4470 \text{ J}/(\text{kg K})$$

$$h_{schm,Eis} = 290 \text{ kJ/kg}$$

(Literaturwert: 334 kJ/kg)

# Energetik einsackender Berge



Einsack-Bedingung  $\Delta E_{pot} \geq \Delta E_{form}$ :

$$\Delta mgh \geq h_{schm} \cdot \Delta m \quad \Rightarrow \quad h \geq h_{schm}/g \approx 30 \text{ km für Eis}$$

Granit, Basalt: ähnliche Größenordnung wie Eis!

Tatsächliche höchste Berge  $\sim 10 \text{ km}$ .

# Wie ist es auf anderen Planeten?

Allgemein: Massekugel mit Masse  $M$ , Radius  $R$ ,  
Gravitationsbeschleunigung an der Oberfläche  $g$ :

$$g \equiv \frac{GM}{R^2} = \frac{4}{3}\pi\rho GR = g_{\oplus} \left(\frac{\rho}{\rho_{\oplus}}\right) \left(\frac{R}{R_{\oplus}}\right)$$

mit  $\rho_{\oplus}, R_{\oplus}$  dem Dichte- bzw. Radiuswert für die Erde

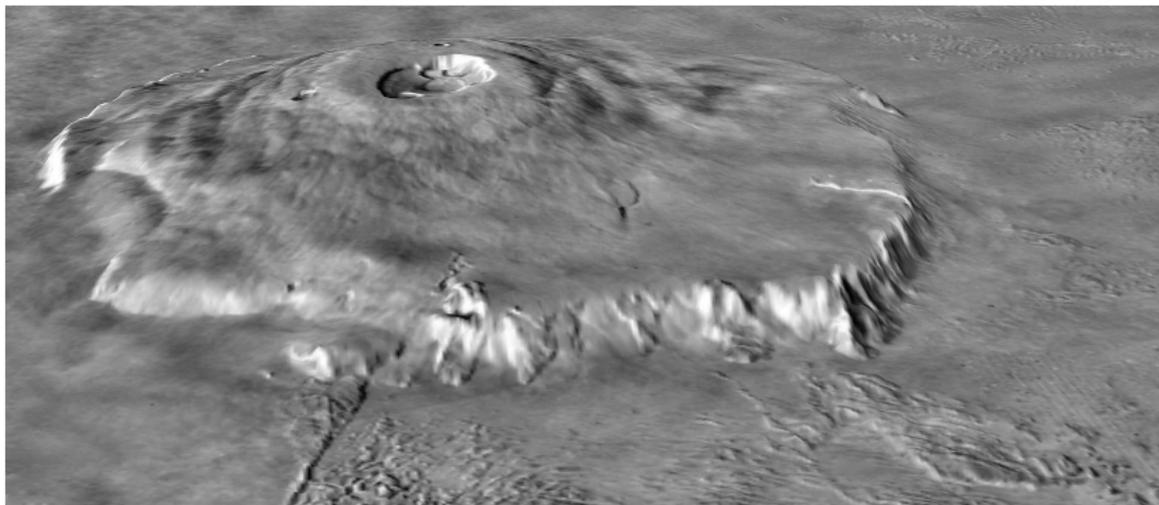
$$\Rightarrow h_{max} = \left(\frac{\rho_{\oplus}}{\rho}\right) \left(\frac{R_{\oplus}}{R}\right) \cdot 30 \text{ km.}$$

# Höhe von Bergen: Mars

$$\rho_{Mars} = 0.71 \rho_{\oplus}, R_{Mars} = 0.53 R_{\oplus}:$$

$$\Rightarrow h_{max,Mars} = 80 \text{ km.}$$

vgl. höchsten Berg auf dem Mars: Olympus Mons, Höhe 22 km.



3D-Rekonstruktion Mars Global Surveyor und Viking-Aufnahme. Bild: NASA/MOLA Science Team

# Höhe von Bergen: Venus

$$\rho_{Venus} = 0.95 \rho_{\oplus}, R_{Venus} = 0.95 R_{\oplus}$$

$$\Rightarrow h_{max,Venus} = 33 \text{ km}$$

vgl. höchste Bergkette auf Venus: Maxwell Montes, Höhe 11 km.

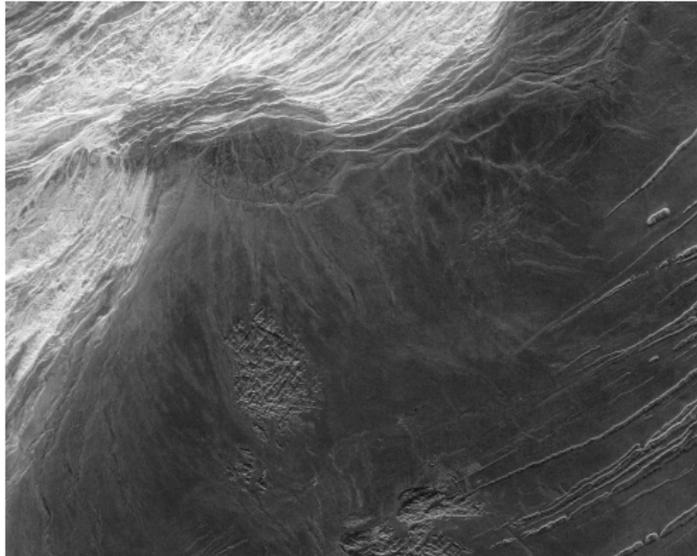


Bild: NASA/JPL, Magellan-Radarbild

# Höhe von Bergen: Merkur

$$\rho_{\text{Merkur}} = 0.99 \rho_{\oplus}, R_{\text{Merkur}} = 0.38 R_{\oplus}$$

$$\Rightarrow h_{\text{max,Merkur}} = 80 \text{ km}$$

aber höchster Merkur-Berg, Caloris Montes, ca. 3 km hoch!

⇒ Physik gibt erstmal nur Rahmenbedingungen vor.

Ob es hohe Berge gibt, hängt aber von den Entstehungsmechanismen ab!

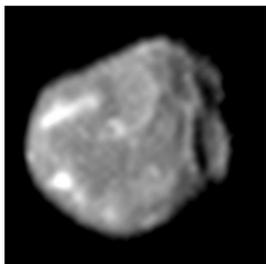
# Form von Kleinobjekten

Ab wann können „Berge“ so hoch werden wie das astronomische Objekt groß ist?

Grenzfall  $h_{max} = R$ :

$$R = \sqrt{\frac{\rho_{\oplus}}{\rho}} \cdot 440 \text{ km}$$

# Form von Kleinobjekten



Jupitermond  
Amalthea,  $R = 84$  km  
Bild: NASA/JPL/Cornell  
University



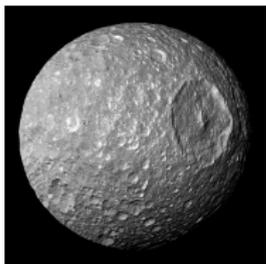
Saturnmond Janus,  
 $R = 90$  km  
Bild: NASA/JPL/Space  
Science Institute



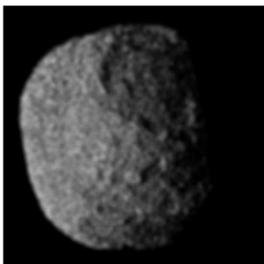
Saturnmond Phoebe,  
 $R = 120$  km  
Bild: NASA/JPL/Space  
Science Institute



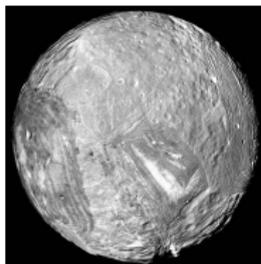
Saturnmond Hyperion,  
 $R = 133$  km  
Bild: NASA/JPL/Space  
Science Institute



Saturnmond Mimas,  
 $R = 200$  km  
Bild: NASA/JPL/Space  
Science Institute



Neptunmond Proteus,  
 $R = 210$  km  
Bild: NASA/JPL



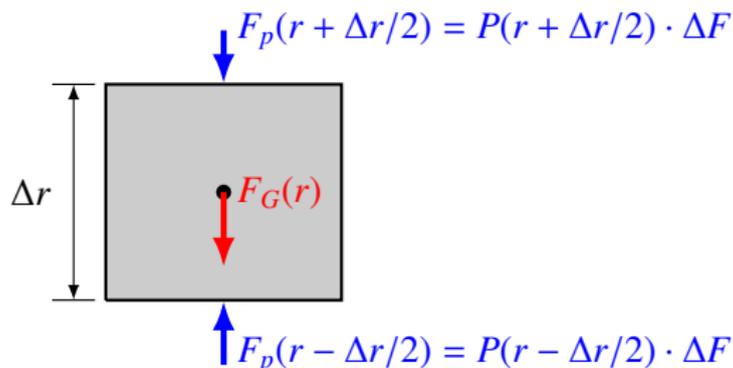
Uranusmond Miranda,  
 $R = 236$  km  
Bild: NASA/JPL-Caltech



Saturnm. Enceladus,  
 $R = 250$  km  
Bild: NASA/JPL/Space  
Science Institute

# Wie groß kann ein festes Objekt werden?

Einfaches Modell: Kugel. Betrachte kleines Volumenelement der Höhe  $\Delta r$ , Fläche (quer dazu)  $\Delta F$ , es wirken Gravitationskraft  $F_G$  und Druckkräfte  $F_P$  von oben und von unten:



Ergibt eine Grundgleichung

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}$$

# Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}$$

Vereinfachte Lösung für Festkörper: Annehmen, dass Dichte  $\rho$  konstant ist, insbesondere also

$$M(r) = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Damit lässt sich die Grundgleichung lösen und man erhält

$$P(r) = \frac{2}{3}\pi G\rho^2(R^2 - r^2).$$

Alternativ: Umschreiben in Abhängigkeit von der Gesamtmasse  $M$ :

$$P(r) = \frac{3}{8\pi} \frac{GM^2}{R^4} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

# Stabilitätsbedingung

Stabil ist ein solches Objekt nur, wenn es einen Mechanismus gibt, der den nötigen Gegendruck erzeugen kann, insbesondere den Maximaldruck  $P(0)$  im Zentrum,

$$P(0) = \frac{3}{8\pi} \frac{GM^2}{R^4}.$$

In einem Festkörper ist der Gegendruck letztlich der Entartungsdruck der Elektronen:

$$P_E = \frac{3^{2/3}}{20\pi^{4/3}} \cdot \frac{h^2}{m_e} \left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}.$$

Masse kommt vor allem von den Atomkernen. Für jedes Elektron ein Proton; Faktor  $\mu > 1$  drückt aus, dass auch Neutronen zur Masse beitragen,  $M = N(\mu m_p)$

# Stabilitätsbedingung

Drückt man Entartungsdruck durch Masse und Radius aus, dann erhält man eine Bedingung für den maximalen Radius von

$$\begin{aligned} R &= \frac{(3/2)^{4/3}}{10\pi^2} \frac{h^2}{Gm_e(\mu m_p)^{5/3} M^{1/3}} \\ &= \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1/3} \left(\frac{\mu}{2}\right)^{-5/3} 1300 \text{ km} = \left(\frac{M}{M_\oplus}\right)^{-1/3} \left(\frac{\mu}{2}\right)^{-5/3} 10^5 \text{ km} \end{aligned}$$

# Erdähnliche (terrestrische) Planeten

$$R = \sqrt{\frac{3^{5/3}}{40\pi^{7/3}}} \cdot \frac{h}{\sqrt{Gm_e(\mu m_p)^{5/3}\rho^{1/3}}} = 32\,000 \text{ km} \left(\frac{\rho}{1000 \text{ kg/m}^3}\right)^{-1/6} \left(\frac{\mu}{2}\right)^{-5/6}$$

und mit Dichtewert für die Erde,  
 $\rho = 5500 \text{ kg/m}^3$ ,

$$R_{max} = 25\,000 \text{ km} \sim 4 R_{\oplus}.$$



Bild: NASA/ GSFC/ NOAA/ USGS

# Atmosphären

Gas schwieriger als Festkörper — Druckprofil stellt sich ein.



Bild: ISS013-E-54329, Earth Science and Remote Sensing Unit, NASA Johnson Space Center



Bild: Jupiter und Io, aufgenommen von der Cassini-Mission. NASA/JPL/University of Arizona

Beachtliche Variationsbreite:

Erdatmosphäre zu Erdradius 1:1000

Jupiter „atmosphäre“ zu Jupiterradius ca. 1:2 (Wahl et al. 2017, Juno-Mission)

# Wann ist eine Atmosphäre stabil?

Bei konstanter Temperatur folgt die Geschwindigkeitsverteilung in einem Gas der **Maxwell-Boltzmann-Verteilung** — Anteil der Teilchen mit Geschwindigkeiten zwischen  $v$  und  $v + dv$  ist  $f(v) dv$ , mit

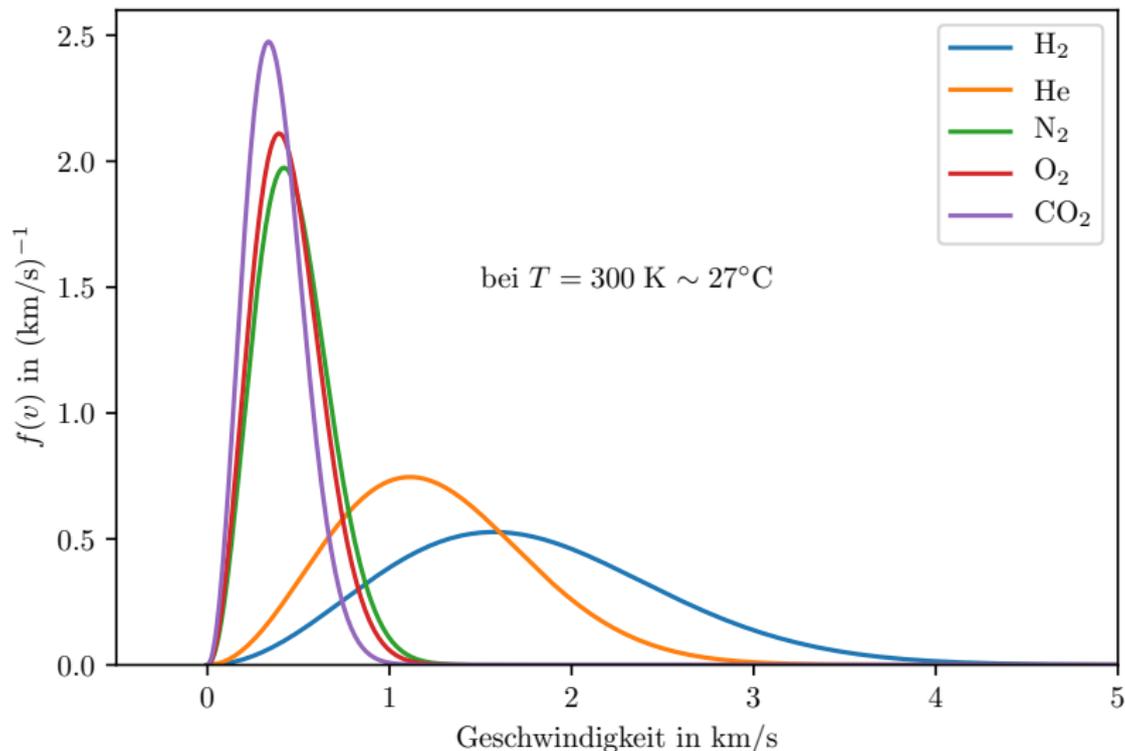
$$f(v) = \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} 4\pi v^2 \exp \left[ -\frac{mv^2}{2k_B T} \right]$$

so dass die Gasteilchen den Geschwindigkeits-Mittelwert

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$$

haben, mit  $m$  Teilchenmasse,  $k_B$  Boltzmannkonstante,  $T$  Temperatur in Kelvin.

# Beispiel Maxwell-Boltzmann



[verbessert nach hilfreichen Zuruf aus der Hörschaft]

# Fluchtgeschwindigkeit für Atmosphären-Moleküle

Energieerhaltung für Körper der Masse  $m$  im Gravitationsfeld einer kugelsymmetrischen Masse  $M$ , Abstand  $r$  vom Zentrum, Geschwindigkeit  $v$ :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r} = \text{const.}$$

Folgt Definition **Fluchtgeschwindigkeit**: Geschwindigkeit, um von Körperoberfläche bei  $R$  ins Unendliche zu gelangen:

$$v_{Fl} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

# Flucht- vs. thermische Geschwindigkeit

Durchschnittsgeschwindigkeit Gasteilchen in einem Gas:  
Maxwell-Boltzmann oder direkt Gleichverteilung:

$$v_{th} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} \approx \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

Grobes Kriterium: Atmosphäre „entflieht instantan“, wenn  $v_{th} \sim v_{Fl}$ .  
Parametrisiere  $m = \mu \cdot m_p$ .

$$T_{crit} = \frac{GM\mu m_p \pi}{4k_B R} \sim 6000 \text{ K} \left( \frac{M/R}{M_{\oplus}/R_{\oplus}} \right)$$

— das kann aber nur eine Obergrenze sein, in Wirklichkeit wäre  
Zeitskala  $\sim 4.5 \cdot 10^9$  a bereits problematisch.

# Jeans-Parameter

Definiere Jeans-Parameter als Funktion der Höhe  $h$  über der Oberfläche:

$$\lambda(z) = \frac{2GMm}{(R+z)k_B T} = 3 \left( \frac{v_{Fl}}{v_{th}} \right)^2$$

Jeans-Parameterwerte (aus Raten-Betrachtungen):

- $\lambda > 30$ : fest gravitativ gebunden
- $\lambda < 5$ : hydrodynamisches Abströmen
- $\lambda < 1.5$ : “blow-off”

... auf Höhe  $z$  der *Exosphäre* (wo zu wenige Kollisionen stattfinden, um ein Teilchen, das nach draußen strebt, aufzuhalten)

# Jeans-Parameter

Zum Vergleich: definiere

$$v_{crit}(T, \mu) = 3 \cdot v_{th}(T, \mu) = 5.5 \cdot \sqrt{\frac{k_B T}{m_p \mu}}$$

so dass Atmosphäre stabil ist bei

$$v_{crit} < v_{Fl}.$$

Trage auf:  $v_{crit}(T)$  für verschiedene Atom- bzw. Molekülsorten und  $T_{exo}$ ,  $v_{Fl}$  (Exosphären-Temperaturen und Fluchtgeschwindigkeiten) für Planeten/Monde

# Stabile Atmosphären

