

# Handout zum Themenkreis Kosmologie

Markus Pössel

Astronomische Methoden für Nichtphysiker, WS 2016/2017

## 1 Homogene Universumsmodelle

Ausgangspunkt der hier vorgestellten homogenen Modelle des Kosmos ist ein Gedankenexperiment, bei dem wir uns vorstellen, wir könnten das Universum so dokumentieren, wie es jetzt, in diesem Moment ist. Der Schnappschuss zeige die räumliche Verteilung von Abermilliarden von Galaxien. Deren innere Struktur interessiert uns in diesem Modell nicht, und wir stellen uns die Galaxien als Punktteilchen vor, Stichwort „Galaxienstaub“.

Dass unser Universum auf großen Skalen homogen ist, bedeutet: Messen wir an verschiedenen Stellen im Raum für ein hinreichend großes Volumen (z.B. Würfel der Kantenlänge einige hundert Millionen Lichtjahre) die mittlere Dichte, dann erhalten wir immer in etwa den gleichen Dichtewert – unabhängig davon, wo im All wir unseren Würfel bzw. allgemeiner unser auszumessendes Volumen positionieren.

Wir werden diese Homogenität im folgenden bei der Formulierung unserer kosmischen Modelle ausnutzen und den Materieinhalt unseres Universum in unseren Rechnungen in der Regel idealisiert als homogenes Medium betrachten: In einem komplett homogenen Medium ist die Dichte überall, auch auf kleinsten Größenskalen, dieselbe, egal, welchen Ort wir betrachten. In solch einem Medium gilt: Die Masse  $M$  in einer gegebenen Raumregion ist gleich dem Produkt der (überall konstanten) Dichte  $\rho$  und dem Volumen  $V$  der betreffenden Region,  $M = \rho V$ .

Gedanklich verwenden wir also zwei Bilder parallel zueinander: Das Bild von frei im Raume schwebenden Galaxien und das eines perfekt homogen mit Materie erfüllten Raums. Jedes dieser Bilder wenden wir dort an, wo es uns weiterhilft: das Bild von frei im Raum schwebenden Galaxien insbesondere immer dort, wo es darum geht, Signale von einem Ort des Universums zu schicken; das homogene Bild, wenn wir uns über Größen wie Dichte, Temperatur oder Druck Gedanken machen, die durchschnittliche Materieeigenschaften beschreiben. Auf einige Grenzen dieser Modellvorstellung werde ich unten noch eingehen.

## 2 Skalenfaktor-Expansion

Die Anordnung der Galaxien in unserem gedanklichen Schnappschuss lässt sich vollständig beschreiben, wenn man alle paarweisen Abstände der Galaxien zueinander angibt. (Tatsächlich benötigt man sogar nur eine Untermenge all der vielen paarweisen Abstände.)

Das gängige Modell für die *kosmische Expansion* beschreibt eine Situation, dass sich all jene wechselseitigen Abstände mit der Zeit proportional zu demselben globalen

zeitabhängigen Skalenfaktor  $a(t)$  ändern. In anderen Worten: Betrachte ich zwei beliebige Galaxien  $A$  und  $B$ , die auf einem zur Zeit  $t_1$  angefertigten instantanen Schnappschuss den Abstand  $d_{AB}(t_1)$  und zu einer anderen Zeit  $t_2$  den Abstand  $d_{AB}(t_2)$  haben, dann hängen diese beiden Abstände über

$$d_{AB}(t_2) = \frac{a(t_2)}{a(t_1)} \cdot d_{AB}(t_1), \quad (1)$$

wobei die Funktion  $a(t)$  unabhängig davon ist, welche beiden Galaxien wir betrachten. Solche Abstandsänderungen proportional zum Skalenfaktor werden auch als *Hubble-Fluss* oder *Hubble-Flow* bezeichnet. Wir reden entsprechend auch davon, dass die betreffenden Galaxien „dem Hubble-Flow folgen“.

Kosmische Expansion liegt vor, wenn  $a(t)$  mit fortschreitender Zeit  $t$  wächst, als Ableitung geschrieben (Punkt entspricht Ableitung nach der Zeit):  $\dot{a}(t) > 0$ . Dann nämlich wachsen alle Abstände zwischen beliebigen zwei unserer Galaxien mit der Zeit an. Der umgekehrte Fall, kosmischer Kollaps, lässt sich mit solchen Modellen ebenfalls beschreiben. Er würde  $\dot{a}(t) < 0$  entsprechen, trifft aber heutigem Wissen nach weder auf die Vergangenheit unseres Weltalls zu noch auf seinen gegenwärtigen Zustand oder seine Zukunft. Prinzipiell lässt diese Beschreibung auch ein statisches Universum zu,  $\dot{a}(t) = 0$ . Hier zeigen Stabilitätsbetrachtungen allerdings, dass es sich um eine instabile Situation handelt, die daher nicht zur Modellierung realer Universen taugt.

### 3 Caveats: Eigenbewegung und wo wir es uns zu einfach gemacht haben

Einige Caveats zu unserem Modell sind angebracht. Das erste betrifft eine Grenze unseres Modells. Wirkliche Galaxien weichen in ihren Bewegungen üblicherweise etwas vom Hubble-Flow ab: Sie haben eine gewisse eigene Geschwindigkeit relativ zum Hubble-Flow, die Eigenbewegung genannt wird und bis zu rund 1000 Kilometer pro Sekunde betragen kann. Wie sehr die Eigenbewegungen relativ zum Hubble-Flow ins Gewicht fallen, hängt von den Abständen ab, die man betrachtet. Beobachten wir Galaxien, die uns vergleichsweise nahe sind, dann wird die Eigenbewegung über die kosmische Expansion zu dominieren. Ab Abständen von 50 Millionen Lichtjahren und mehr dagegen beginnt der Hubble-Flow wichtiger zu werden als die Eigenbewegung; bei noch größeren Abständen beginnt er die Abstandsänderung ferner Galaxien relativ zu uns komplett zu dominieren.

Das zweite Caveat betrifft unseren Umgang mit der Zeitkoordinate. Die oben eingeführte Vorstellung gedanklicher Schnappschüsse des Galaxienstaubs, auf denen das Universum jeweils auf großen Skalen homogen erscheint, setzt implizit bereits eine ganz bestimmte Zeitkoordinate voraus – der Schnappschuss soll die Eigenschaften des Universums jetzt, in diesem Moment, festhalten; das setzt voraus, dass wir bereits einen bestimmten Gleichzeitigkeitsbegriff definiert haben, anhand dessen wir bestimmen können, was „jetzt“ im Zusammenhang mit dem betrachteten Modell überhaupt bedeuten soll. Dass Gleichzeitigkeit relativ, also von der Wahl des Bezugssystems abhängig und je nach Bezugssystem verschieden ist, zeigt bereits die Spezielle

Relativitätstheorie. In der Allgemeinen Relativitätstheorie ist die Freiheit der Koordinatenwahl noch einmal ungleich größer, und auch die Definition von Gleichzeitigkeit daher im allgemeinen sehr flexibel.

Dass sich zumindest in unserer Situation ein naheliegender Gleichzeitigkeitsbegriff vergleichsweise einfach definieren lässt, hängt direkt mit der Homogenitätseigenschaft zusammen. Verkürzt gesagt: Nur mit dieser Wahl des Gleichzeitigkeitsbegriffs hat das Universum auf instantanen gedanklichen Schnappschüssen tatsächlich überall die gleiche Dichte. Anders ausgedrückt ist ein homogenes Universum in der Allgemeinen Relativitätstheorie gerade

Zuletzt sei noch angemerkt, dass unsere gedanklichen Schnappschüsse wirklich instantan sind. Ein wirklicher Schnappschuss dokumentiert, welches Licht zum Aufnahmezeitpunkt bei der Kamera ankommt und zeigt entfernte Regionen des Universums dementsprechend so, wie sie in der Vergangenheit (nämlich zur Zeit der Lichtaussendung) waren. In der Sprache der Relativitätstheorie zeigt uns solch ein echter Schnappschuss Ereignisse, die auf unserem Vergangenheitslichtkegel liegen. Unsere gedanklichen Schnappschüsse sollen dagegen tatsächlich den Zustand des Universums in dem gewählten Augenblick festhalten – ein Gedankenexperiment eben.

## 4 Hubble-Relation

Aus der Allgemeinen Relativitätstheorie folgt direkt, dass sich die Wellenlänge einer Lichtwelle in einem expandierenden Universum ebenfalls proportional zum Skalenfaktor verändert; die Frequenzverschiebung ist

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_a}{\lambda_a} = \frac{a(t_0)}{a(t_a)} - 1, \quad (2)$$

wobei der Index a den Aussendezeitpunkt, der Index 0 die Jetztzeit und damit den Empfangszeitpunkt anzeigt. Anders geschrieben gilt

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_a)}. \quad (3)$$

Auch daraus folgt näherungsweise die Hubble-Relation – bzw. bei entfernteren Objekten folgen Brems- bzw. Beschleunigungseffekte (Dunkle Energie).

Um die Hubble-Relation in diesem Zusammenhang abzuleiten, betrachten wir die Taylorentwicklung des Skalenfaktors um den jetzigen Zeitpunkt  $t_0$ , mit der Notation

$$a(t) = a_0 [1 + H_0(t - t_0) + \dots]. \quad (4)$$

Daraus folgt direkt, dass

$$\frac{a(t_a)}{a(t_0)} \approx 1 + H_0(t_a - t_0). \quad (5)$$

Aber andererseits gilt nach (3) für Licht, das zum Zeitpunkt  $t_a$  ausgesandt wird und uns zum Zeitpunkt  $t_0$  erreicht, dass

$$\frac{a(t_a)}{a(t_0)} = \frac{1}{1 + z} \approx 1 - z. \quad (6)$$

Wir haben also näherungsweise

$$z \approx H_0(t_0 - t_a) \quad (7)$$

bzw. wenn wir beide Seiten mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$  malnehmen,

$$cz \approx H_0 \cdot c(t_0 - t_a). \quad (8)$$

In der klassischen Betrachtungsweise ist der Ausdruck  $c(t_0 - t_a)$  gerade der Abstand, den Licht von  $t_a$  bis  $t_0$  zurückgelegt hat. In klassischer Betrachtungsweise entspricht das gerade dem Abstand  $d$  des Aussendeorts von uns. Bei genauerer Betrachtung muss man an dieser Stelle verschiedene Abstandsbegriffe der Kosmologie voneinander unterscheiden; für nicht allzu große Entfernungen (entsprechend unseren Näherungsannahmen) gilt der Zusammenhang aber in guter Näherung.

Damit erhalten wir den Zusammenhang

$$cz = H_0 \cdot d \quad (9)$$

als eine Form des Hubble-Gesetzes. Bei unserer vorigen Ableitung (siehe Vorlesungsfolien) hatten wir dem Dopplereffekt gemäß  $v = cz$  als Geschwindigkeit der Galaxie betrachtet. Auch das ist für nicht allzu große kosmologische Abstände eine zulässige Interpretation.

## 5 Entwicklung des Skalenfaktors mit der Zeit

Ein zentraler Teil der modernen kosmologischen Modelle ist die Beschreibung dafür, wie sich der kosmische Skalenfaktor  $a(t)$  mit der Zeit ändert und wie diese Zeitabhängigkeit dadurch bestimmt wird, welchen Materieinhalt des Universum hat.

Würden wir im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie agieren – was weit jenseits des hier gewählten Niveaus liegt! – dann würden wir die Raumzeiteigenschaften eines homogenen und isotropen Universums in geeigneten Koordinaten hinschreiben (Robertson-Walker-Metrik), ebenso einen sinnvollen Ansatz für Energie und Impuls einfacher Materie in solch einem Universum (Energie-Impuls-Tensor eines idealen Fluids), und dann würden wir die beiden Objekte über die Einstein-Gleichungen zueinander in Beziehung setzen. Das Ergebnis solchen Vorgehens sind die sogenannten *Friedmann-Gleichungen*, die zeitliche Änderungsraten des kosmischen Skalenfaktors mit Dichte und Druck der Materie verknüpfen.

Tatsächlich lassen sich wesentlichen Eigenschaften der Friedmann-Gleichungen auch mithilfe der Newton'schen Beschreibung der Gravitation herleiten — mit einigen durch die Relativitätstheorie motivierten Änderungen. Dazu betrachten wir zwei Galaxien im Hubble-Flow; eine davon setzen wir der Bequemlichkeit halber in den Nullpunkt des Raumkoordinatensystems, in dem wir die Geschehnisse beschreiben. Der (zeitabhängige) Abstand der zweiten Galaxie von der ersten sei  $r(t)$ .

Wir teilen das Weltall jetzt in zwei komplementäre Regionen: Die Vollkugel mit Radius  $r(t)$  um den Nullpunkt herum und den ganzen Rest. Auf ein Objekt in (oder gerade auf der Grenze) der Vollkugel wird die Masse der außenliegenden Region insgesamt keine Anziehung ausüben.

Das kann man direkt aus dem Newton'schen Resultat für die Anziehungskraft von Massen-Kugelschalen ableiten, das ich in den letzten zwei Wochen zweimal kurz erwähnt hatte: Auf Testteilchen innerhalb der Kugelschale übt eine kugelschalenförmige homogene Massenordnung keinerlei Anziehungskraft aus; auf Testteilchen außerhalb wirkt eine homogene Kugelschale so, als sei ihre gesamte Masse als Punktmasse im Mittelpunkt der Kugel konzentriert.

Letzere Aussage sagt uns auch, wie die Masse der Vollkugel auf die am Rande befindliche Galaxie 2 wirkt, nämlich so, als sei ihre gesamte Masse eine Punktmasse im Raumnulldpunkt. Die Newton'sche Gravitationsbeschleunigung sagt uns, dass die Galaxie 2 in dieser Situation entsprechend

$$\ddot{r}(t) = -\frac{GM}{r(t)^2} \quad (10)$$

auf den Raumnulldpunkt (wo wir als Beobachter uns befinden) zu beschleunigt wird. Wir haben dabei wieder die Konvention benutzt, dass ein Punkt über einer Größe eine Ableitung nach der Zeit anzeigt, zwei Punkte bedeuten die zweite Ableitung nach der Zeit, und so weiter.

Die Masse  $M$  der Vollkugel lässt sich dabei durch die (zeitabhängige) Dichte  $\rho(t)$  unseres Kosmos ausdrücken, und zwar ergibt sich aus der üblichen Formel für das Kugelvolumen

$$M = \frac{4}{3}\pi r(t)^3 \cdot \rho(t) \quad (11)$$

Eingesetzt ergibt das für die Beschleunigung

$$\ddot{r}(t) = -\frac{4G\pi}{3}r(t)\rho(t). \quad (12)$$

An dieser Stelle müssen wir uns freilich überlegen, was wir überhaupt für die Massendichte  $\rho(t)$  einsetzen. Bei Newton steht dort tatsächlich nur die Masse als Eigenschaft von Materieteilchen. Bei Einstein sind Masse und Energie aber nun einmal äquivalent (sagt die berühmte Formel  $E = mc^2$ ), und im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie zeigt sich tatsächlich, dass der gesamte Energieinhalt des Universums zur Dichte beiträgt (kinetische Energie, thermische Energie etc.).

Wer sich daran erinnert, wie Energie und Impuls in der Speziellen Relativitätstheorie ähnlich wie Zeit und Raum zu einer vierdimensionalen Größe zusammengefasst werden (Viererimpuls), den wird nicht wundern, dass zudem nicht die Energie allein als Quelle wirkt, sondern dass auch der Impuls eine Gravitationsquelle ist. Wichtig wird dieser Umstand in Situationen wie im frühen Universum, wo die Materie in Form eines heißen Gases oder Plasmas vorliegt — und damit in Form eines Fluids mit einem inneren Druck  $p$ . Dieser Druck  $p$  wiederum lässt sich, man denke an die Herleitung der Eigenschaften des idealen Gases in der statistischen Mechanik, als Durchschnitt der Impulse der vielen durcheinander fliegenden Teilchen des Fluids auffassen.

Eine Konsequenz der Allgemeinen Relativitätstheorie, die wir hier ohne weitere Herleitung übernehmen, ist daher, dass man in der Beschleunigungsformel (12) den richtigen Quellterm erhält, wenn man die Ersetzung

$$\rho \rightarrow \rho + \frac{3p}{c^2}$$

vornimmt und wenn, wie erwähnt, das verbleibende  $\rho$  sämtliche Energiebeiträge der Materie einschließt.

Die Beschleunigungsgleichung wird dann

$$\ddot{r}(t) = -\frac{4G\pi}{3}r(t) \left[ \rho + \frac{3p}{c^2} \right]. \quad (13)$$

Jetzt müssen wir noch berücksichtigen, dass die zeitliche Entwicklung von  $r(t)$  komplett durch den kosmischen Skalenfaktor bestimmt wird, und zwar ist

$$r(t) = \frac{r(t_0)}{a(t_0)} \cdot a(t)$$

für eine beliebig gewählte Bezugszeit  $t_0$ . Eingesetzt in Gleichung (13) kann man die nicht zeitabhängigen Faktoren  $r(t_0)$  und  $1/a(t_0)$  auf beiden Seiten herauskürzen. Übrig bleibt eine Gleichung, die nicht mehr von den spezifischen Eigenschaften der Galaxie 2 abhängt, sondern nur noch Skalenfaktor, Dichte und Druck in Beziehung setzt; hätten wir für unsere Betrachtungen ein anderes Galaxienpaar gewählt, wären wir am Ende auf genau diese selbe Gleichung gestoßen. Die Gleichung lautet jetzt

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4G\pi}{3} \left[ \rho + \frac{3p}{c^2} \right]. \quad (14)$$

Sie wird *Friedmann-Gleichung zweiter Ordnung* (letzteres wegen der zweiten Ableitung auf der linken Seite) oder kurz *zweite Friedmann-Gleichung* genannt.

## 6 Materieeigenschaften und Expansion

Die oben abgeleitete Friedmann-Gleichung verknüpft drei zeitabhängige Funktionen: Skalenfaktor, Dichte und Druck. Um sie zu lösen, benötigen wir noch zwei weitere Gleichungen. Die eine ist materiespezifisch und besagt, wie Druck und Dichte zusammenhängen,  $p = p(\rho)$ . Diese Beziehung wird in der Physik *Zustandsgleichung* genannt; einige einfache Beispiele werden wir unten einführen. Die zweite noch fehlende Gleichung beschreibt, wie sich die Dichte der Materie im Verlauf der Expansion verändert. Sie drückt aus, dass so etwas wie Energieerhaltung gilt: Die mit der Materie assoziierte Energie kann sich zwar verdünnen, aber z.B. nicht ins Nichts verschwinden.

Beginnen wir mit der Energieerhaltung. Wir wählen als Ausgangspunkt eine übliche Form der Energieerhaltung in der Thermodynamik: den ersten Hauptsatz. Dieser besagt, dass sich die innere Energie  $U$  eines Systems wie folgt ändert, wenn man das Volumen des Systems um  $dV$  ändert (und das bei Verkleinerungen gegen, bei Vergrößerungen unterstützt durch den Druck  $p$  des Systems), und dem System dabei die Wärmeenergiemenge  $\delta Q$  zuführt:

$$dU = -p dV + \delta Q. \quad (15)$$

In unserem Falle gibt es keine Wärme, die dem Universum von außerhalb zuflösse (denn es gibt per Definition kein außerhalb), und es fließt auch keine Wärme von einer Region des Universums in eine andere (ein Netto-Wärmefluss würde der Homogenität widersprechen, ein großräumiger Durchfluss der Isotropie), so dass  $\delta Q = 0$ . Die innere

Energie setzen wir in Beziehung zur Dichte die, wie bereits erwähnt, sämtliche mit der Materie assoziierten Energieformen (thermische Energie, kinetische Energie...) einschließt. Die gesamte Energie unserer im Volumen  $V$  befindlichen Materie ist damit

$$U = \rho c^2 \cdot V \quad (16)$$

und die Änderung dieser Größe,  $dU$ , lässt sich mittels der Leibniz'schen Regel auf die Änderungen der Faktoren zurückführen,

$$dU = (V \cdot d\rho + \rho \cdot dV)c^2. \quad (17)$$

Damit wird der erste Hauptsatz (15) in diesem Spezialfall zu

$$d\rho + (\rho + p/c^2) \frac{dV}{V} = 0. \quad (18)$$

Jetzt betrachten wir einen Ausschnitt aus dem Hubble-Flow – eine Region, deren Materie sich allein aufgrund der kosmischen Expansion mit der Zeit gleichmäßig auf ein immer größeres Volumen verteilt. Wir sind an der Änderungsrate von  $\rho$  mit der Zeit interessiert und schreiben die Gleichung daher um als

$$\dot{\rho} + (\rho + p/c^2) \frac{\dot{V}}{V} = 0, \quad (19)$$

wobei ein Punkt wiederum für die erste Ableitung nach der Zeit steht. Der einfachste Fall für die betrachtete Region ist ein würfelförmiges Volumen mit Kantenlänge

$$l(t) = \frac{a(t)}{a(t_0)} l(t_0), \quad (20)$$

wiederum mit einer willkürlichen, aber fest gewählten Referenzzeit  $t_0$ . Das Volumen des Würfels ist

$$V = l(t)^3.$$

Setzen wir den Ausdruck (20) für  $l(t)$  ein, dann ist

$$\frac{\dot{V}}{V} = 3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)},$$

und die Gleichung für  $\dot{\rho}$  wird zu

$$\dot{\rho} = -3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} (\rho + p/c^2). \quad (21)$$

(Es leuchtet ein, dass auch jedes andere durch eine Längenskala  $l$  definiertes Volumen zu dieser Formel führt: Von den Einheiten her muss  $V$  skalieren wie  $V \sim l^3$ , und jegliche konstanten Vorfaktoren heben sich in dem Ausdruck  $\dot{V}/V$  weg.)

An dieser Stelle kommen die unterschiedlichen Zustandsgleichungen ins Spiel.

Die Zustandsgleichung für Staub (etwa unseren Galaxienstaub) lautet  $p = 0$ . Aus der obigen Gleichung folgt daraus

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)},$$

Das lässt sich direkt integrieren zu

$$\rho(t) \sim \frac{1}{a(t)^3}.$$

Das Ergebnis ist einfach zu verstehen: Unsere Galaxien im Hubble-Flow beispielsweise gehen schließlich nicht verloren, sondern verteilen sich im Laufe der kosmischen Expansion lediglich auf ein immer größeres Volumen, und dieses Volumen wächst eben mit  $a(t)^3$ .

Für *Strahlung* ergibt sich aus der Elektrodynamik  $p = \frac{1}{3}\rho c^2$ , also

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -4 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

bzw.

$$\rho(t) \sim \frac{1}{a(t)^4}.$$

Auch das lässt sich direkt erklären, wenn wir uns die Strahlung zusammengesetzt denken aus Photonen: Im Laufe der Expansion verteilen sich diese Photonen auf ein immer größeres Volumen (das erklärt  $1/a(t)^3$ ); zusätzlich wird jedes einzelne davon durch die Expansion rotverschoben; der Energieverlust ( $E = h\nu$ ) ergibt einen weiteren Faktor  $1/a(t)$ .

Besonders interessant ist eine Zustandsgleichung  $p = -\rho c^2$ . Eingesetzt in die Gleichung (21) ergibt sich für solch eine Art von Materie

$$\dot{\rho} = 0.$$

Mit anderen Worten: Materie mit solcher Zustandsgleichung verändert ihre Dichte im Laufe der kosmischen Expansion überhaupt nicht! Materie mit dieser Zustandsgleichung wird als *Dunkle Energie* bezeichnet. Messungen zeigen, dass Dunkle Energie in unserem heutigen Universum die dominante Rolle spielt.

## 7 Friedmann-Gleichung erster Ordnung

Wir können die Gleichung (21) verwenden, um die Friedmann-Gleichung zweiter Ordnung (14) zu integrieren. Dazu eliminieren wir den Druck  $p$  aus der Friedmann-Gleichung und erhalten

$$\dot{a} \ddot{a} = \frac{4\pi G}{3} [2a\dot{a}\rho + a^2\dot{\rho}]. \quad (22)$$

Beide Seiten lassen sich integrieren, und wir erhalten

$$\frac{1}{2}(\dot{a})^2 = \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 + \text{const.} \quad (23)$$

Die bisher abgeleiteten Gleichungen, die den Skalenfaktor enthalten, verändern sich nicht, wenn wir den Skalenfaktor  $a(t)$  mit irgendeinem konstanten Faktor  $\kappa$  malnehmen, der aufgrund unserer Interpretation des Skalenfaktors freilich größer als Null sein muss,

$$a(t) \rightarrow \kappa \cdot a(t).$$



Wir nutzen diesen Umstand aus, um die Integrationskonstante auf eine besonders einfache Form zu bringen; die Gleichung für  $\dot{a}$  wird mit einer solchen Redefinition üblicherweise geschrieben als

$$\frac{\dot{a}^2 + Kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (24)$$

wobei  $K$  jetzt nur noch drei mögliche Werte hat:  $K = -1, 0, +1$ . Aus der Allgemeinen Relativitätstheorie lässt sich ein Zusammenhang zwischen dem Wert von  $K$  und der (lokalen) Raumgeometrie des Universums herleiten: Im Falle  $K = -1$  ist die lokale Raumgeometrie, messbar etwa durch Bestimmung der Winkelsummen im Dreieck, hyperbolisch, das dreidimensionale Analogon einer zweidimensionalen Sattelfläche.  $K = 0$  entspricht der üblichen euklidischen Raumgeometrie, wie man sie in der Schule lernt; dort beträgt die Winkelsumme im Dreieck immer  $180^\circ$ . Für  $K = +1$  ist die lokale Raumgeometrie sphärisch, also das dreidimensionale Analogon der lokalen Geometrie einer zweidimensionalen Kugeloberfläche.

Gleichung (24) ist die *Friedmann-Gleichung erster Ordnung*. Zusammen mit Ansätzen dazu, welchen Anteil der Gesamtdichte die drei vorgestellten Materiesorten – Staub, Strahlung, Dunkle Energie – ausmachen, sind die beiden Friedmann-Gleichungen die Grundlage zur Berechnung der Veränderung des kosmischen Skalenfaktors mit der Zeit.