Astronomische Objekte modellieren I: Festkörper

Markus Pössel

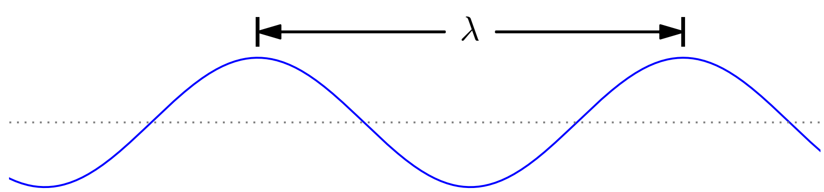
Handout zur Vorlesung „Methoden der Astronomie für Nichtphysiker" am 24.11.2016

1 Quantenteilchen

Die folgende Darstellung orientiert sich weitgehend an Victor Weisskopf, „Of Atoms, Mountains and Stars" in Science 187 (1975), 605– 612].

Für Quantenteilchen (Elektronen, Protonen, ...) gilt wie für Licht: Quantenteilchen sind sowohl Welle als auch Teilchen. Wie beim Licht (siehe die zweite Vorlesung) werden Quantenteilchen als Teilchen nachgewiesen, aber ihre Aufenthaltswahrscheinlichkeit werden durch eine Wellenfunktion bestimmt.

Freie Teilchen entsprechen dabei einfachen Sinuswellen, mit konstanter Wellenlänge wie hier eingezeichnet:



Genau wie bei Licht hängen auch bei Quantenteilchen Energie E und Frequenz ν miteinander zusammen:

$$E = h\nu. \tag{1}$$

Auch Impuls p des entsprechenden Teilchens und Wellenlänge λ der entsprechenden Welle hängen zusammen, und zwar als

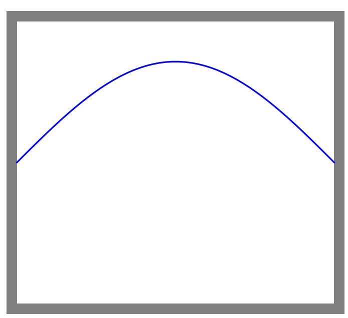
$$p = \frac{h}{\lambda}. \tag{2}$$

2 Lokalisierte Teilchen

Die Wellennatur und deren Zusammenhang mit Impuls bzw. Energie hat Konsequenzen für die Eigenschaften lokalisierter bzw. eingeschlossener Teilchen – astronomisch relevantes Beispiel: Teilchen, die durch ihre gegenseitige Gravitationsanziehung auf einen begrenzten Raum zusammengedrängt werden, etwa im Inneren von Sternen und Planeten.

Vereinfacht argumentieren wir hier mit einem Teilchen, das in einen Kasten eingeschlossen ist. Für eine genauere Behandlung müsste man die Begriffe der potentiellen Energie und des Potentialtopfes einführen und sich klarmachen, welchen Randbedingungen eine Welle in solch einer Situation erfüllen muss (insbes. Knoten an den Kastenwänden).

Wir behelfen uns mit der anschaulichen Vorstellung, dass die Welle, die die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für ein Teilchen beschreibt, als Welle in einen Kasten der Größe d passen muss. Die längste Welle, die man als Ganzes in solch einem Kasten unterbringt, hat gerade die Wellenlänge $\lambda_{max} = 2d$; so passt gerade ein Wellenbauch bzw. Wellental zwischen die Kastenwände und schwingt dort als stehende Welle, wie hier gezeigt:



Eine maximale mögliche Wellenlänge entspricht einem minimalen Impuls, den ein solches eingesperrtes Teilchen tragen muss – entsprechend der Gleichung (2) ist z.B. der minimale Impuls in x-Richtung eines in x-Richtung eingesperrten Teilchens

$$p_{min,x} = \frac{h}{\lambda_{max}} = \frac{h}{2d} \tag{3}$$

und entsprechend in y- und z-Richtung. Mit der in der klassischen Mechanik (nicht-relativistich) gültigen Beziehung zwischen Impuls und kinetischer Energie,

$$E_{kin,min} = \frac{1}{2}mv_{min}^2 = \frac{p_{min}^2}{2m}, \tag{4}$$

hat ein eingesperrtes Teilchen die Minimal-Bewegungsenergie

$$E_{kin,min} = \frac{p_{min,x}^2 + p_{min,y}^2 + p_{min,z}^2}{2m} = \frac{3}{8} \cdot \frac{h^2}{md^2}. \tag{5}$$

Die numerischen Vorfaktoren darf man bei solchen Rechnungen nicht allzu ernst nehmen. Die können sich bei genauerer Behandlung durchaus ändern. Je nachdem in wie hoher Potenz die betreffenden Faktoren vorkommen, kann sich dabei auch durchaus die Größenordnung um ein bis zwei Größenordnungen oder noch mehr ändern. Es gibt damit drei Stufen der Zuverlässigkeit solcher Rechnungen: Auf die genauen Vorfaktoren sollte man sich gar nicht verlassen. Bei den Größenordnungen sollte man mit Abweichungen zumindest rechnen. Die funktionalen Zusammenhänge dagegen, also z.B. welche physikalischen Größen dort mit welcher Potenz, in welcher Kombination vorkommen, sollte eine vereinfachte Rechnung näherungsweise (insbesondere: bis auf kleine Zusatzterme, die addiert werden) richtig wiedergeben.

In unserem Fall heißt das: Der prinzipielle Zusammenhang

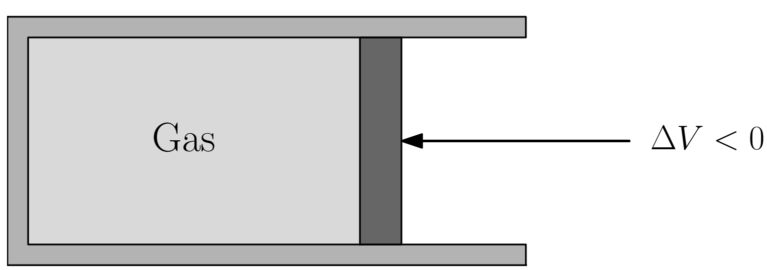
$$E_{kin,min} \sim \frac{h^2}{md^2} \tag{6}$$

dürfte auch in einer genaueren Rechnung erhalten bleiben.

3 Von der Energie zum Druck

Wer ein unter Druck stehendes Gas noch weiter komprimieren will, muss dafür Arbeit aufwenden. Mit anderen Worten: eine Volumenverkleinerung $\Delta V < 0$ gegen den Druck p führt dazu, dass man eine Energie ΔE aufwenden muss. Um diese Energiedifferenz wächst die innere Energie des betreffenden Gases. Dabei gilt

$$\Delta E = -p \cdot \Delta V \quad \Rightarrow p = -\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}V}. \tag{7}$$



Andererseits hatten wir in Gl. (6) gesehen, wie die Energie eines Quantenteilchens im Kasten von der Seitenlänge d des Kastens abhängt. Bei einem würfelförmigen Kasten ist $V = d^3$ bzw. $d = V^{1/3}$, also

$$E_{kin,min} \sim \frac{h^2}{md^2} = \frac{h^2}{mV^{2/3}}. \tag{8}$$

Damit können wir die Ableitung von E nach V, also den Druck, direkt ausrechnen, nämlich zu

$$p = -\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}V} = \frac{2}{3}\frac{h^2}{mV^{5/3}} = \frac{2}{3}\frac{h^2}{md^5}. \tag{9}$$

Diesen Druck haben eingesperrte Teilchen alleine aufgrund ihrer Quanteneigenschaften, ihrer Wellennatur.

4 Pauli-Prinzip und Mehrteilchensysteme

Das *Pauli-Prinzip* besagt, dass sich nie zwei Materieteilchen in dem gleichen Quantenzustand befinden können.[1]

Das Pauli-Prinzip ist unter anderem für die Schalenstruktur der Atome verantwortlich. Sie entsteht, weil sich die Elektronen eben nicht alle im energieärmsten Zustand nahe am Atomkern versammeln können, sondern stattdessen nach und nach alle möglichen Zustände auffüllen, auch die mit höherer Energie als der Grundzustand.

Wir ersetzen die exakte Rechnung durch die Vorstellung, dass N identische Quantenteilchen, zum Beispiel N Elektronen, die in ein Volumen eingesperrt sind, sich so verhalten, als stünde jedem der Elektronen das „private Volumen" $v = V/N$ zur Verfügung.[2]

Der Druck aufgrund der Quantennatur, im Zusammenhang mit den privaten Volumina von Materieteilchen auch *Entartungsdruck* genannt, ist, wenn wir

[1] Konkret gilt dies für alle Quantenteilchen mit halbzahligem Spin, sogenannte Fermionen. Dazu gehören alle Elementarteilchen der Materie, also Elektronen, Quarks, Neutrinos und so weiter.

[2] Mit dem Wissen, dass Elektronen noch einen zusätzlichen Freiheitsgrad haben, der ihren Zustand definiert, nämlich die Orientierung ihres Eigendrehimpulses (Spin) relativ zu einer gegebenen Bezugsrichtung, könnte man hier argumentieren, dass $v = 2V/N$, weil sich je zwei Elektronen eines dieser privaten Volumina teilen können. Da wir numerische Vorfaktoren bei unseren Überschlagsrechnungen sowieso nicht so ernst nehmen, sondern vor allem an den funktionalen Zusammenhängen der physikalischen Größen interessiert sind, vernachlässigen wir diese Komplikation an dieser Stelle.

$d = v^{1/3}$ in Formel (9) einsetzen und numerische Vorfaktoren einmal mehr vernachlässigen,

$$p_E \sim \frac{h^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}. \tag{10}$$

Zum Vergleich: eine exakte Rechnung ergibt für den Fall von Elektronen

$$p_E = \frac{3^{2/3}}{20\,\pi^{4/3}} \cdot \frac{h^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3} \approx 0.05\,\frac{h^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}. \tag{11}$$

Unsere Abschätzung ergibt also bis auf einen Faktor von rund 20 das richtige Ergebnis, und sie ergibt den richtigen Funktionalzusammenhang zwischen p_E, N, V, h und m.

5 Wasserstoffatom

Die Energie eines Elektrons, das ein einzelnes Proton umkreist, setzt sich aus kinetischer und potenzieller Energie zusammen – erstere aufgrund der Bewegung des Elektrons, die zweite aufgrund der elektrostatischen Anziehung von Elektron und Proton.

Die potenzielle Energie für die elektrostatische Coulomb-Kraft in Abhängigkeit des Abstandes r des Elektrons vom Proton hat dann den Wert

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}, \tag{12}$$

mit e der Elementarladung und $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\,C^2/Nm^2$ der sogenannten Dielektrizitätskonstante des Vakuums.[3]

Stellen wir uns analog zu unseren vorigen Überlegungen vor, dass das Elektron im Abstand r vom Proton auf einer kreisförmigen Umlaufbahn der Länge $2\pi r$ eingeschränkt ist, und dass die größte Wellenlänge, die sich ohne Diskontinuitäten auf eine solche kreisförmige Bahn wickeln lässt gerade $\lambda_m in = 2\pi r$ ist, dann hat unser Elektron analog zu (6) die minimale kinetische Energie[4]

$$E_{kin}(r) = \frac{h^2}{2m(2\pi r)^2}. \tag{13}$$

[3] Dies hier ist der exakte Wert, inklusive der richtigen Vorfaktoren.

[4] Kleinere Faktoren, die beim Übergang von unseren bisherigen Würfeln zur Kugel auftreten, vernachlässigen wir wieder einmal.

Die Gesamtenergie des Elektrons ist damit

$$E(r) = E_{kin}(r) + V(r) = \frac{h^2}{2m(2\pi r)^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}. \tag{14}$$

Eine Kurvendiskussion (Ableitung von $E(r)$, Nullsetzen) zeigt, dass die Energie ihr Minimum bei

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 h^2}{(2\pi)^2\, e^2\, m_e} \approx 5 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m} \tag{15}$$

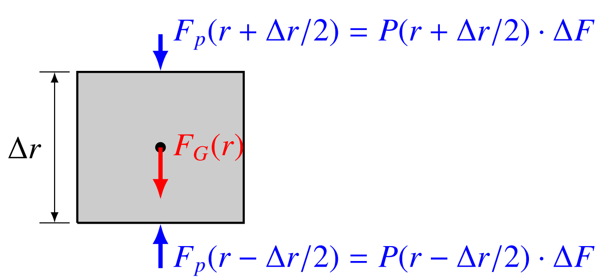
erreicht. Das ist der sogenannte *Bohrsche Radius*, und eine gute Abschätzung für die Größen von Atomen. Die zugehörige Energie ist

$$E_{min} = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2\, h^2} \approx -2.17987217572 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J} = -13.6\,\mathrm{eV}, \tag{16}$$

die Ionisationsenergie des Wasserstoffatoms, auch *Rydbergenergie* genannt.

6 Gravitation und Gegendruck

Wie in der Vorlesung beschrieben, betrachten wir einen kleinen Ausschnitt eines kugelsymmetrischen Körpers: ein kleines Volumen, hier im Querschnitt dargestellt:



Wie besagt, dies hier ist der Querschnitt – oberes und unteres Ende sollen jeweils eine Fläche ΔF besitzen, so dass die kleine Region insgesamt ein Volumen $\Delta V = \Delta r \cdot \Delta F$ besitzt.

Wie verhält es sich mit Druck und Masse, wenn sich das Gebilde, das wir betrachten, im Gleichgewicht befindet?

Dann müssen sich insbesondere die Kräfte, die auf unsere kleine Teilregion wirken, zu Null addieren. Unterhalb und oberhalb unseres Elements herrscht jeweils ein Druck $P(r)$, der vom Abstand r vom Zentrum abhängt. Wenn wir dem

Mittelpunkt unserer kleinen Region den Radiuswert r zuordnen, dann herrscht direkt unterhalb unserer Region der Druck $P(r - \Delta r/2)$, der unsere Region nach oben drückt, und direkt oberhalb der Druck $P(r - \Delta r/2)$. Ein Druck P, der auf eine Fläche ΔF wirkt, erzeugt eine Kraft $P \cdot \Delta F$.

Zusätzlich wirkt die Gravitationskraft auf unsere Region, und zwar in Richtung Zentrum. Dabei wirkt die im Bereich kleiner als r versammelte Masse $M(r)$ so, als wäre sie eine im Kugelmittelpunkt konzentrierte Punktmasse. Unsere kleine Region besitzt ihrerseits eine Masse $m = \rho(r)\Delta V = \rho(r)\,\Delta F\,\Delta r$, wobei $\rho(r)$ die Dichte der Materie im Abstand r vom Kugelmittelpunkt ist.

Insgesamt ergibt sich daraus gemäß der Newtonschen Formel für das Gravitationsgesetz die Kraft mit dem Betrag

$$F_g = G\frac{M(r)\rho(r)\Delta F\,\Delta r}{r^2}. \tag{17}$$

Auch diese Kraft wirkt zum Kugelmittelpunkt hin.

Insgesamt summieren sich Gravitationskraft und Druckkräfte zu

$$\frac{GM(r)}{r^2} \cdot \rho(r)\,\Delta r\,\Delta F \quad + \quad P(r + \Delta r/2) \cdot \Delta F \quad - \quad P(r - \Delta r/2) \cdot \Delta F = 0 \stackrel{!}{=} 0 \tag{18}$$

Diese Bedingung kann man wie folgt umschreiben. Die Kombination

$$\frac{P(r + \Delta r/2) - P(r - \Delta r/2)}{\Delta r}$$

entspricht im Grenzfall Δr gerade die Ableitung von $P(r)$ nach dem Radius r, also

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}.$$

Damit wird (18) zu

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}. \tag{19}$$

Das ist eine der Grundgleichungen für den Aufbau astronomischer Objekte.

7 Vereinfachtes Druckgleichgewicht

Die Gleichung (19) ist eine Differenzialgleichung, in der drei verschiedene Funktionen vorkommen: $M(r)$ und $\rho(r)$ auf der rechten Seite, $P(r)$ in Form seiner Ableitung auf der linken. Um eine Lösung zu finden, benötigt man im allgemeinen noch weitere Gleichungen für diese Größen.

Wir treffen folgende vereinfachende Annahme: Die Dichte unseres Körpers möge konstant sein, $\rho = const.$. Das ist für Festkörper bis zu einer gewissen Größe sicher eine gute Näherung, und auch für größere Körper sollte dieses vereinfachte Modell zumindest eine sinnvolle Abschätzung ermöglichen.

Bei konstanter Dichte ist die Gesamtmasse einer Kugel mit Radius r, also unsere Funktion $M(r)$, gerade gegeben durch

$$M(r) = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3. \tag{20}$$

Damit vereinfacht sich die Gleichung (19):

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\frac{4}{3}\pi G\rho^2 r. \tag{21}$$

Das ist eine Gleichung für die Ableitung von $P(r)$, die nur noch von r und von Konstanten abhängt. Solch eine Ableitung kann man direkt integrieren und erhält

$$P(r) = -\frac{2}{3}\pi G\rho^2 r^2 + C \tag{22}$$

mit einer Integrationskonstante C. Den Wert der Integrationskonstante kann man wie folgt bestimmen: Außerhalb des Objekts gibt es keine Materie, und damit auch nichts, was einen Druck ausüben könnte. Wir nehmen an, dass der Verlauf der Funktion $P)r$ =stetig ist, dass $P(r)$ also keine Sprünge macht. Damit muss direkt an der Oberfläche unseres (kugelförmigen) Körpers, beim Radius R des Körpers, gelten, dass $P(R) = 0$. Setzt man in (22) $r = R$ und fordert $P(R) = 0$, dann erhält man die Gleichung

$$C = \frac{2}{3}\pi G\rho^2 R^2.$$

Eingesetzt in unsere Druckgleichung (22) ergibt das

$$P(r) = \frac{2}{3}\pi G\rho^2 (R^2 - r^2). \tag{23}$$

Man kann diese Gleichung auch umschreiben, indem man die konstante Dichte ρ durch die Gesamtmasse

$$M \equiv \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \tag{24}$$

ausdrückt, und erhält

$$P(r) = \frac{3}{8\pi}\frac{GM^2}{R^4}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \tag{25}$$

Am höchsten ist der Druck damit, nicht überraschend, im Zentrum. Dort beträgt er

$$P(0) = \frac{3}{8\pi}\frac{GM^2}{R^4}. \tag{26}$$

8 Festkörper im Gravitations-Druckgleichgewicht

Für einen kugelförmigen Festkörper unter seiner eigenen Schwerkraft wird der Gegendruck durch den Entartungsdruck (11) erzeugt: Der Festkörper widersetzt sich weiterer Kompression, welche die Orbitale der Elektronen seiner Atome ineinanderdrücken würde.

Stabil ist der Festkörper, solange der Zentraldruck kleiner ist als der Entartungsdruck

$$P_E = \frac{3^{2/3}}{20\,\pi^{4/3}} \cdot \frac{h^2}{m_e}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}.$$

Jetzt müssen wir allerdings noch beide Drücke so umschreiben, dass sie von denselben Größen abhängen. Das Gesamtvolumen ist in unserem Falle

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Die Anzahl der Elektronen N können wir wie folgt durch die Masse ausdrücken. Wir nehmen an, dass unser Festkörper insgesamt elektrisch neutral ist, sprich: dass es genau soviele Elektronen wie Protonen gibt. Elektronen besitzen soviel weniger Masse als Protonen, dass wir die Elektronen zur Berechnung der Gesamtmasse M vernachlässigen können. Allerdings sind da auch noch die Neutronen, die näherungsweise dieselbe Masse haben wie die Protonen, nämlich pro Nukleon (pro Proton oder Neutron) $m_p = 1.7 \cdot 10^{-27}$ kg. Angenommen, auf jedes Proton kämen im Durchschnitt $(\mu - 1)$ Neutronen. Dann hat jedes Proton zusammen mit den im Durchschnitt zugehörigen Neutronen die Masse μm_p.

Gibt es insgesamt N Elektronen, dann gibt es insgesamt auch N Protonen, und die Gesamtmasse des Objekts sind

$$M = N\mu\, m_p,$$

bzw. nach N aufgelöst gilt

$$N = \frac{M}{\mu\, m_p}.$$

Eingesetzt erhält man für R den Wert

$$\begin{aligned} R &= \frac{(3/2)^{4/3}}{10\pi^2} \frac{h^2}{Gm_e(\mu\, m_p)^{5/3} M^{1/3}} \\ &= \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1/3} \left(\frac{\mu}{2}\right)^{-5/3} 1300\,\text{km} = \left(\frac{M}{M_\oplus}\right)^{-1/3} \left(\frac{\mu}{2}\right)^{-5/3} \cdot 10^5\ \text{km} \qquad (27) \end{aligned}$$

(wobei die numerischen Vorfaktoren wie bei jeder unserer vereinfachten Rechnungen nicht zu ernst genommen werden sollten).

9 Erdähnliche (terrestrische) Planeten

Wir können diese Gleichung auch so umschreiben, dass die mittlere Dichte anstatt der Masse eingeht, gemäß (24). Dann erhalten wir für den Radius

$$R = \sqrt{\frac{3^{5/3}}{40\pi^{4/3}}} \cdot \frac{h}{\sqrt{Gm_e(\mu\, m_p)^{5/3}\rho^{1/3}}} = 57\,000\ \text{km} \left(\frac{\rho}{1000\,\text{kg/m}^3}\right)^{-1/6} \left(\frac{\mu}{2}\right)^{-5/6}. \qquad (28)$$

Die mittlere Dichte der Erde liegt bei 5500 kg/m^3, und für ihre häufigsten chemischen Elemente (Mg, Si, O, Fe) ist in guter Näherung $\mu = 2$. Eingesetzt erhalten wir als oberen Radius für Planeten mit derselben Dichte wie die Erde

$$R_{max} = 43\,000\,\text{km} \sim 7\,R_\oplus \qquad (29)$$

Für unsere Erde bestünde demnach noch Luft nach oben – sie könnte bei derselben Dichte noch größer sein. Die Größe eines Sterns wie der Sonne, deren Radius rund 110 Erdradien besteht, ließe sich auf diese Weise allerdings nicht erreichen.

10 Weiße Zwerge

Setzt man in den Radiuswert (27) eine Sonnenmasse, $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ kg, ein, sowie den für die leichteren Atomkerne typischen Wert $\mu \approx 2$, dann erhält man ein durch das Elektronengas stabilisiertes Gebilde der Größe

$$R \approx 1300\,\text{km} = 0.2\,R_\oplus. \qquad (30)$$

Genauere Rechnungen führen auf größere Werte von $0.9\,R_\oplus$. Das ist die typische Größe eines *Weißen Zwergsterns* oder, kürzer, eines *Weißen Zwergs*. In solch einen

Zustand geraten Sterne, wenn sie gegen Ende ihres Lebens ihren Kernbrennstoff verbraucht haben. Nachdem sie ihre äußeren Hüllen abgeworfen haben schrumpft der innere Teil zusammen und wird dann, wie wir es hier gezeigt haben, durch den Entartungsdruck der Elektronen stabilisiert.

Bei massereicheren Sternen werden die Elektronen allerdings so schnell, dass wir zur Berechnung des Entartungsdrucks nicht mehr die klassische Beziehung zwischen Energie und Impuls benutzen können. An ihre Stelle tritt die Energiegleichung für die Energie E und den Impuls p relativistischer Teilchen, nämlich

$$E = pc. \tag{31}$$

Wiederholen wir mit dieser Beziehung die Ableitung des Drucks für ein einzelnes in einem Volumen des Durchmessers d lokalisiertes Quantenteilchen aus Abschnitten 2 und 3, dann erhalten wir (mit dem üblichen weitgehenden Verzicht auf Vorfaktoren)

$$E = \frac{hc}{d} = \frac{hc}{V^{1/3}} \tag{32}$$

und entsprechend

$$P = -\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{3}\frac{hc}{V^{4/3}} = \frac{1}{3}\frac{hc}{d^4}. \tag{33}$$

Haben wir es mit N Elektronen zu tun, die wiederum jeweils in ihrem „Privatvolumen" $v = V/N$ lokalisiert sind, dann erhalten wir den Entartungsdruck

$$P_E \sim \frac{1}{3}hc\left(\frac{N}{V}\right)^{4/3}. \tag{34}$$

Beschreiben wir damit einmal mehr die Situation eines kugelförmigen Sterns konstanter Dichte, mit

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

und

$$M = N\mu m_p,$$

und setzen den Entartungsdruck (34) mit dem Zentraldruck (26) gleich, dann erhalten wir die Bedingung

$$\frac{1}{3(4/3\pi)^{4/3}}\,\frac{hc}{R^4}\left(\frac{M}{\mu\, m_p}\right)^{4/3} \overset{!}{=} \frac{3}{8\pi^2}\,\frac{GM^2}{R^4}. \tag{35}$$

Das liefert, im Gegensatz zum nicht-relativistischen Fall, keinen Zusammenhang von R und M; stattdessen kürzt sich R heraus und übrig bleibt eine Grenzmasse, die ein solcher relativistischer Weißer Zwerg nicht überschreiten darf:

$$M_c = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{hc}{G}\right)^{3/2}\frac{1}{(\mu\, m_p)^2} = \left(\frac{\mu}{2}\right)^{-2}\cdot 1.9\, M_\odot. \tag{36}$$

Solch eine Rechnung hta Chandrasekhar erstmals durchgeführt (Chandrasekhar 1930). Modernere Rechnungen ergeben für die sogenannte Chandrasekhar-Masse den Wert

$$M_c = 1.4\, M_\odot. \tag{37}$$

Damit haben Weiße Zwerge eine obere Massengrenze. Was die Frage aufwirft: Was passiert, wenn ein Festkörper schwerer wird als das?

11 Neutronensterne

Dann sind dort immer noch die Nukleonen, also die Neutronen und Protonen, mit Massen $m_p \approx m_n$. Auch diese Teilchen kann man als Quantenteilchen betrachten, hier wieder nichtrelativistisch, und erhält den Entartungsdruck

$$P_E = \frac{3^{2/3}}{20\,\pi^{4/3}}\cdot\frac{h^2}{m_p}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}. \tag{38}$$

Für unser kugelförmiges Gebilde ist wieder

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

aber diesmal

$$M = m_p \cdot N,$$

diesmal ohne den Korrekturfaktor μ. Eingesetzt erhalten wir

$$R = \frac{(3/2)^{4/3}}{10\pi^2}\frac{h^2}{G\, m_p^{8/3} M^{1/3}} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1/3}\cdot 2\,\mathrm{km} \tag{39}$$

– ein astronomisches Gebilde, das bei einer Masse von einer Sonnenmasse die Ausmaße einer Kleinstadt hat! Genauere Rechnungen ergeben etwas größere Werte in der Region von $R \sim 12\,\mathrm{km}$, also in etwa die Querschnittsfläche einer Großstadt.

Das entspricht in unserer Überschlagsrechnung gigantischen Dichtewerten von

$$\rho_{NS} = 4 \cdot 10^{19}\ \mathrm{kg/m^3}, \tag{40}$$

in genaueren Rechnungen etwas geringeren Dichten von $\rho_{NS} \sim 10^{17} \ldots 10^{18}\ \mathrm{kg/m^3}$.

12 Zum Weiterlesen

Schutz, Bernard: *Gravity from the Ground Up*. Cambridge University Press 2004.

Pulsare als Testlabore für Allgemeine Relativitätstheorie: Michael Kramer in *Max-PlanckForschung* 3/2013, http://www.mpg.de/mpf_2013_3

Projekt der Universität Frankfurt mit Studierenden im Grundstudium Physik als Einblick in die nächste Komplikationsstufe der Analyse kompakter Sterne: Sagert et al. 2005, astro-ph/0506417.