

# Allgemeine Relativitätstheorie

**Markus Pössel**

Haus der Astronomie

Fortbildung „Astronomie auf Einsteins Spuren“  
Haus der Astronomie, 19. November 2015

# Inhaltsübersicht

- 1 Einleitung**
- 2 Von der Gravitation zur Geometrie**
- 3 Klassische allgemein-relativistische Effekte**
- 4 Anwendungen der ART**

# Allgemeine Relativitätstheorie

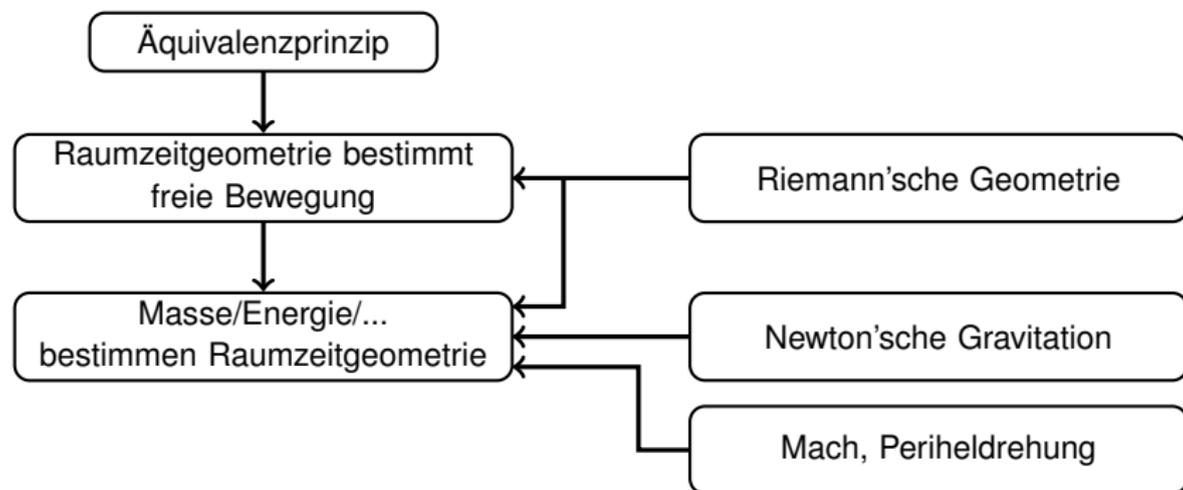
Albert Einsteins Gravitationstheorie, fertig eingereicht am 25. November 1915

Gravitation ist keine Kraft, sondern Eigenschaft der Raumzeit-Geometrie

„Die Raumzeit sagt der Materie, wie sie sich bewegen soll; die Materie sagt der Raumzeit, wie sie sich verzerren soll“  
(nach John Wheeler)

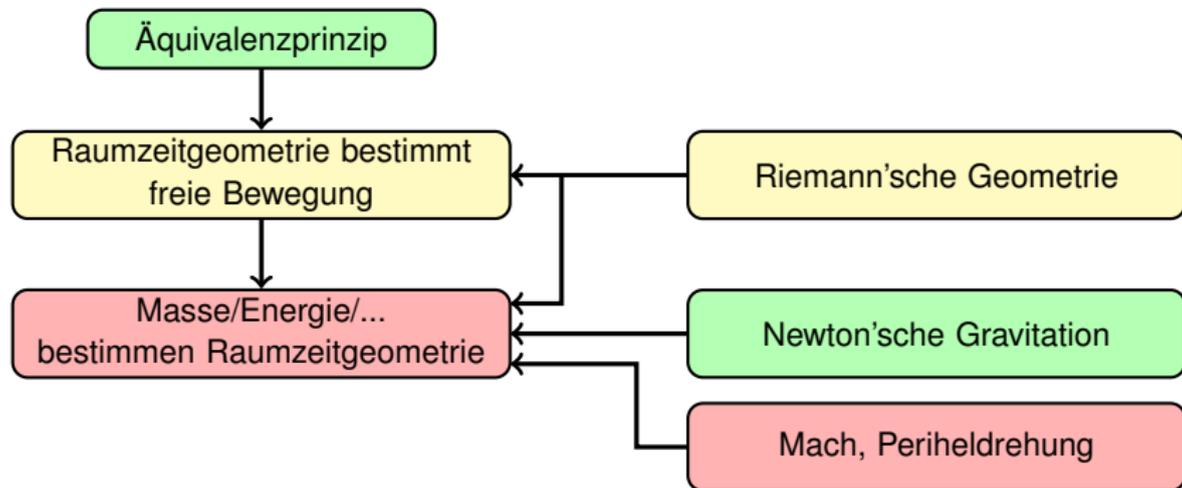
Anwendungen: Relativistische Effekte im Sonnensystem, Gravitationslinsen, Gravitationswellen, Schwarze Löcher, Kosmologie

# Struktur Allgemeine Relativitätstheorie



Ergebnis: **Einstein'sche Feldgleichungen**

# Struktur Allgemeine Relativitätstheorie



Ergebnis: **Einstein'sche Feldgleichungen**

# Wer kann ART wieweit verstehen?

<b>Gruppe</b>	<b>Math. Werkzeuge</b>	<b>Verständnisniveau</b>
Studierende	Differenzialgeometrie	Forschungskompetenz
Interessierte	Ableitungen, Geometrie, Koordinaten	Grundzüge verständlich incl. Einsteingleichungen
Schüler	Schulmathematik und -mechanik	Bausteine, Anwendungen
Alle	anschauliche Geometrie	Populärwissenschaftliche Version

# ART in der Schule in Baden-Württemberg

In den Bildungsplanentwürfen 2016:

Klasse 9/10 3.3.4 Mechanik: Erhaltungssätze (kann genutzt werden, um Fluchtgeschwindigkeit abzuleiten), Newton'sche Dynamik als Kraft

Physik 11/12 zweistündig und Physik 11/12 vierstündig: 3.4.1 bzw. 3.6.1. elektromagnetische Felder enthält „Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen elektrischen Feldern und Gravitationsfeldern beschreiben“ ⇒ Äquivalenzprinzip

Vierstündiger Physikkurs: 3.6.6. vertiefendes Themengebiet  
Möglichkeiten Relativitätstheorie, Kosmologie

Astronomie Wahlfach/Schwerpunkt für zweistündigen Physikkurs:  
Noch nicht veröffentlicht.

# Motivation für die geometrische Beschreibung

In der klassischen Mechanik:

- Natürliche Trägheitsbewegung: gerade, konstante Geschwindigkeit
- Abweichung von der natürlichen Bewegung aufgrund von *Kräften*  
( $\vec{F} = m\ddot{\vec{x}}$ )
- Zusätzliche Modelle für die Krafteigenschaften (z.B. in Abhängigkeit von Ladungen)

Beispiel: Newton'sche Gravitationskraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = -GMm \frac{\vec{r} - \vec{r}_q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^3}.$$

( $\vec{r}$  Ort des Teilchens der Masse  $m$ , das die Kraft spürt,  $\vec{r}_q$  Ort der Gravitationsquelle mit Masse  $M$ , mit  $G$  der Gravitationskonstante.)

# Wie identifiziert man die natürliche Bewegung?

- Wie hält man Trägheitskräfte (z.B. rotierendes Koordinatensystem: Coriolis, Fliehkraft...) und andere Kräfte auseinander?)
- Alle “wirklichen” Kräfte auflisten  $\Rightarrow$  keine sinnvolle grundlegende Definition
- Was haben die Trägheitskräfte gemeinsam?  
 $\Rightarrow$  sie sind in Wirklichkeit als Beschleunigungen definiert!
- Zerlege

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{1}{m} \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) - \vec{A}(t) - 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{x}$$

# ... aber da gibt es leider ein kleines Problem

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{1}{m} \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) - \vec{A}(t) - 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{x}$$

Können wir Testteilchen verwenden, um die verschiedenen Beiträge voneinander zu unterscheiden?

Beispiel: Um den Anteil der elektromagnetischen Kräfte herauszufinden nutze man Testteilchen mit unterschiedlicher spezifischer Ladung

$$\frac{q}{m}$$

Problem: **Gravitation!**

# Warum Gravitation besonders ist

$$\vec{F}(\vec{r}) = -GMm \frac{\vec{r} - \vec{r}_q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^3}.$$

Beschleunigung eines Testteilchens im Feld einer deutlich größeren Masse  $M$ :

$$\frac{1}{m} \vec{F}(\vec{r}) = -GM \frac{\vec{r} - \vec{r}_q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^3}.$$

**Beschleunigung unabhängig von den Teilcheneigenschaften!**

Alternative Formulierung: Schwere Masse gleich träge Masse (z.B. Eötvös-Experiment).

# Eine neue Art von natürlicher Bewegung

Wenn man die *Gravitationsbeschleunigung*  $\vec{g}(\vec{x}, t)$  und die *Trägheitsbeschleunigung*  $\vec{A}(t)$  nicht vollständig auseinanderhalten kann:

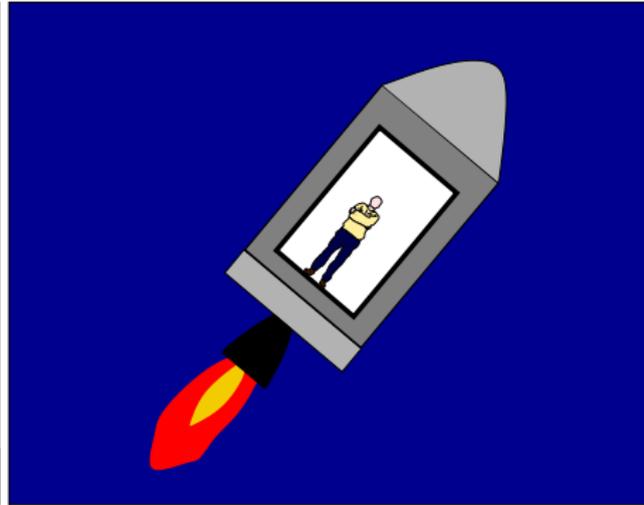
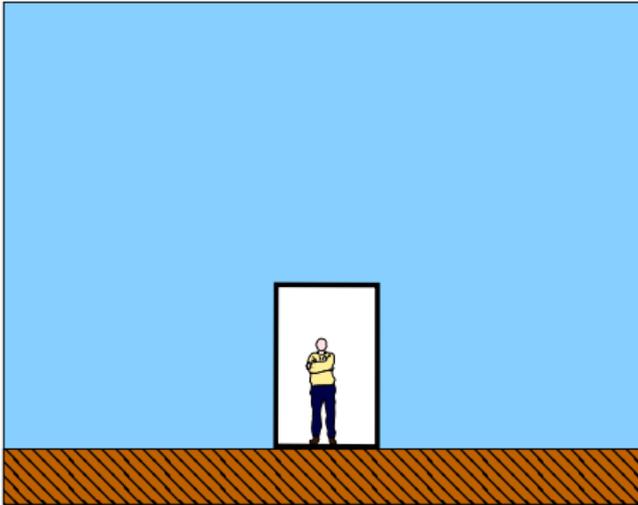
Ersetze

**Testteilchenbewegung = Trägheitsbewegung + Ablenkung durch Kräfte**

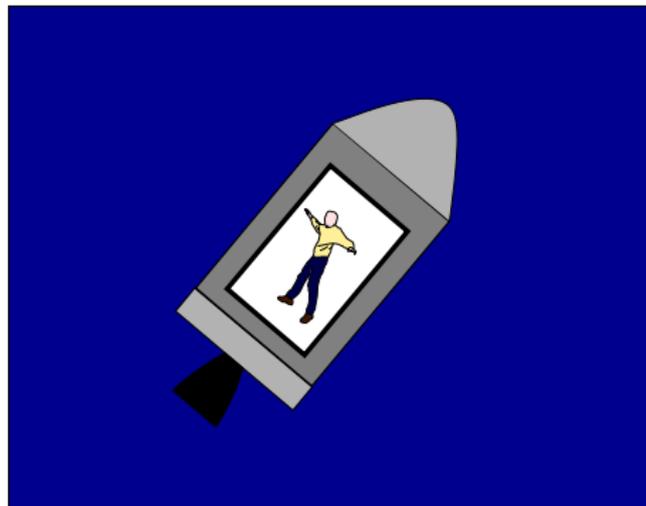
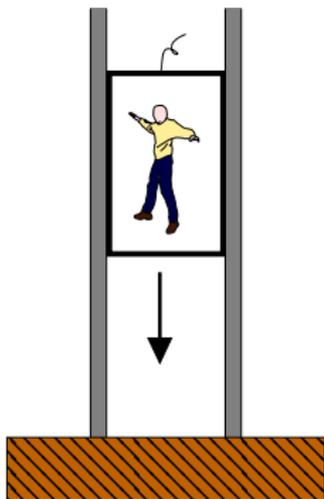
durch

**Testteilchenbewegung = Freier Fall + Ablenkung durch Kräfte**

# Ist Gravitation = Trägheitsbeschleunigung?



# Ist Gravitation = Trägheitsbeschleunigung?



# Mikrogravitation im freien Fall

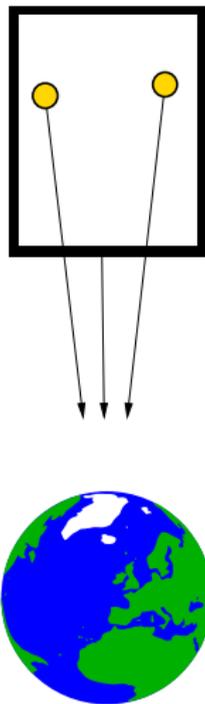
Kapsel im Fallturm des  
Glenn Research Center

Bild: NASA/GRC/P. Riedel, A. Lukas

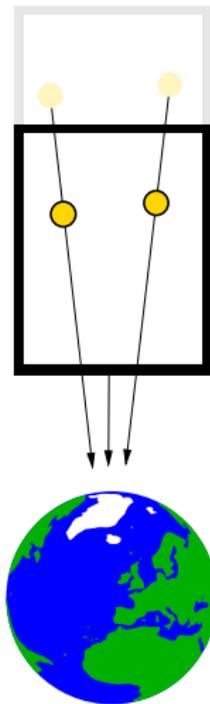
Wichtige  
Erkenntnis: Auch  
Umlaufbahnen  
(ISS) sind freier Fall  
mit  
Mikrogravitation!



# Wirklich keine Schwerkraft im freien Fall?

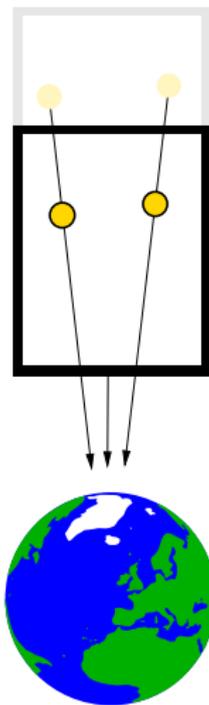


# Wirklich keine Schwerkraft im freien Fall?



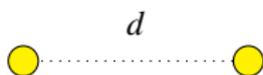
Gezeitenkräfte!

# Wirklich keine Schwerkraft im freien Fall?

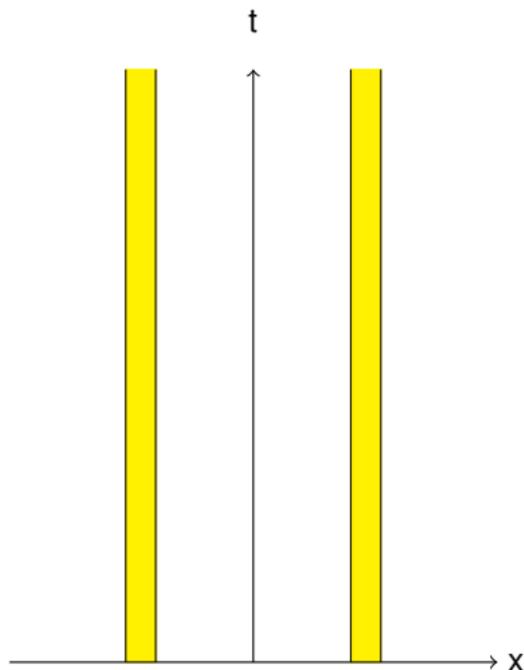


**Gezeitenkräfte!**

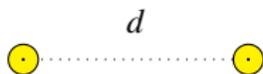
# Raumzeit-Bild: Kugeln im Weltraum



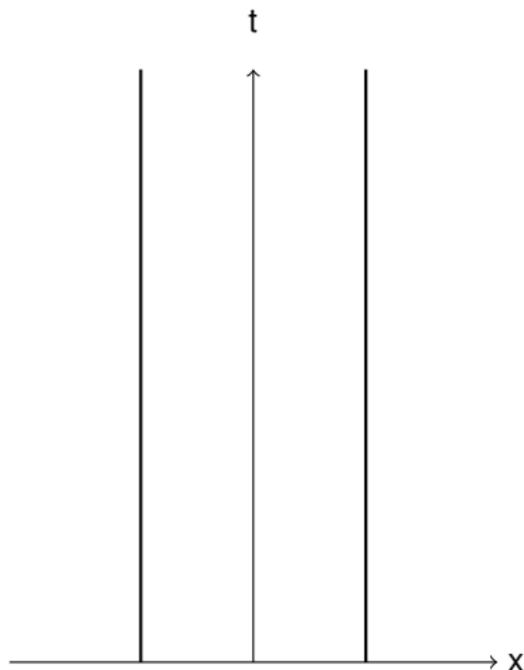
Raumzeitdiagramm dazu: siehe rechts.



# Raumzeit-Bild: Kugeln im Weltraum

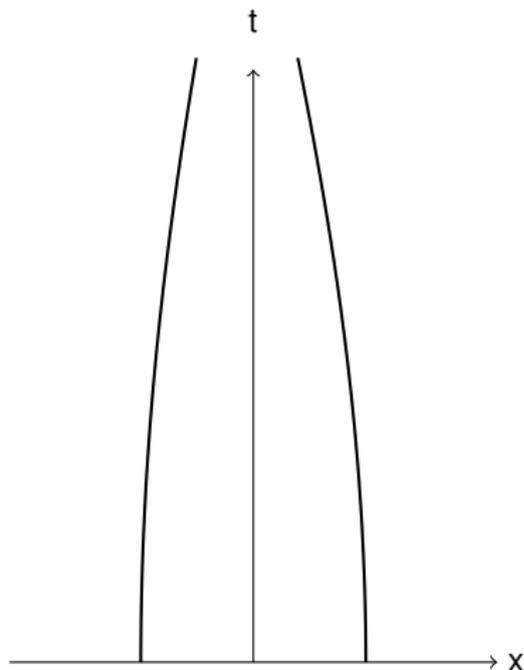


Raumzeitdiagramm  
(vereinfachte Version)



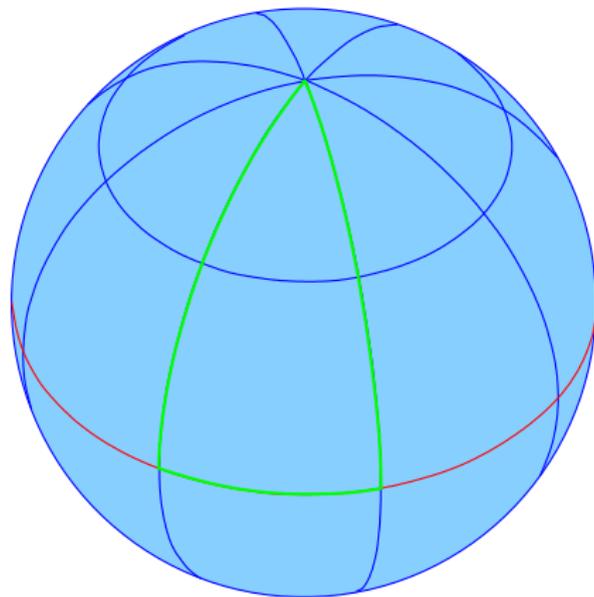
# Raumzeitdiagramm: Kugeln im freien Fall

Ursprünglich sind die Weltlinien parallel. Dann konvergieren sie!



## ... was sind demnach Weltlinien für freien Fall?

Wie im Beispiel konvergieren (oder divergieren) Weltlinien für den freien Fall, selbst wenn sie ursprünglich parallel sind. Geometrische Analogie:



# Legt Analogie mit gekrümmten Oberflächen nahe!

Keine Kräfte: Gerade Weltlinien

Gerademögliche Kurven in der Ebene: Geraden(abschnitte)

---

Freier Fall: Weltlinien können konvergieren/divergieren

auf gekrümmter Oberfläche: gerademögliche Kurven können konvergieren/divergieren

---

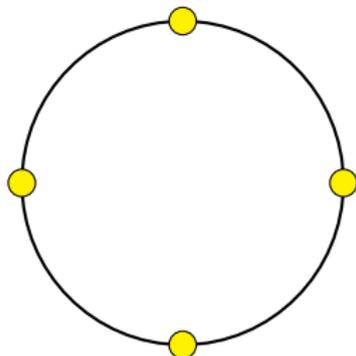
Äquivalenzprinzip

infinitesimaler Ausschnitt aus gekrümmter Fläche sieht flach aus

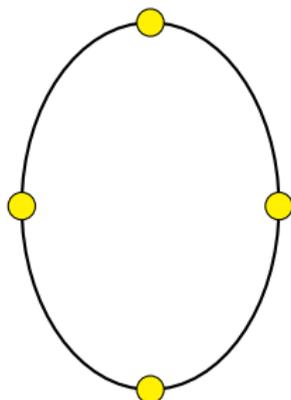
# Was machen Gezeitenkräfte?

Gezeitenkräfte *verformen* Ansammlungen fallender Teilchen (die zwei Kugeln im Fahrstuhlbeispiel rücken näher zusammen).

Aus



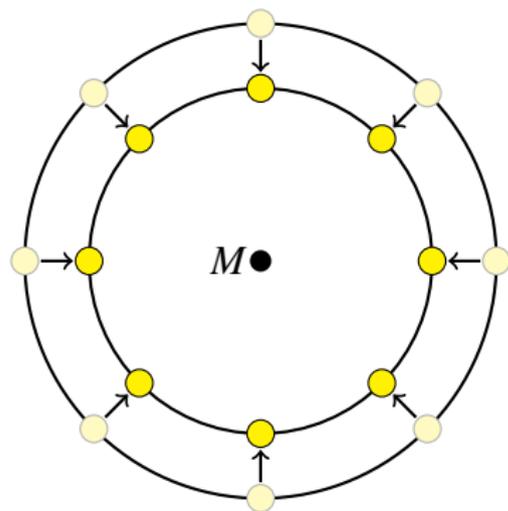
wird



... bei zunächst gleichbleibendem Volumen.

# Was machen Gezeitenkräfte?

Gezeitenkräfte rund um eine kugelsymmetrische herum: Teilchen, die zu Beginn der Betrachtung in Ruhe sind, beginnen in Richtung auf das Zentrum hin zu beschleunigen:



Volumen ist

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Änderung mit der Zeit ist

$$\dot{V}|_{t=0} = 4\pi r^2 \dot{r}|_{t=0} = 0.$$

# Was machen Gezeitenkräfte?

Beschleunigte Änderung zur Zeit  $t = 0$   
(Teilchen beginnen Bewegung) ist

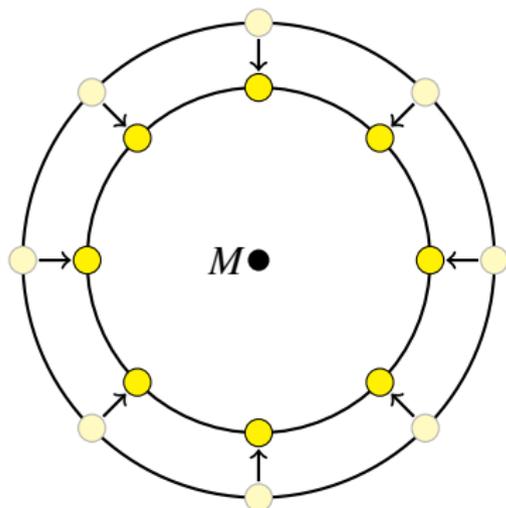
$$\begin{aligned}\ddot{V}|_{t=0} &= 4\pi \left( r^2 \ddot{r} + 2r(\dot{r})^2 \right) \Big|_{t=0} \\ &= 4\pi r^2 \ddot{r} = -4\pi G M\end{aligned}$$

wobei wir die Newton'sche  
Schwerebeschleunigung eingesetzt  
haben,

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2}.$$

Relative Beschleunigung:  $\frac{\ddot{V}}{V} \Big|_{t=0} = -4\pi G \rho,$

mit  $\rho \equiv M/V$  der mittleren Dichte im betrachteten Volumen.



# ART in Kurzform

**Äquivalenzprinzip:** In einem kleinen Bezugssystem im freien Fall gilt die Physik der SRT

**Gezeiteneinfluss:** Bällchen frei fallender Teilchen zieht sich zusammen wie

$$\left. \frac{\ddot{V}}{V} \right|_{t=0} = -4\pi G \rho$$

**Gravitationsquellen:** Dichteterm  $\rho$  ist nicht nur die Massendichte, sondern enthält Energie- und Druckanteile

**Geometrie:** Gezeitenkräfte entsprechen Raumzeit-Krümmung; fallende Teilchen bewegen sich entlang geradestmöglicher Bahnen.

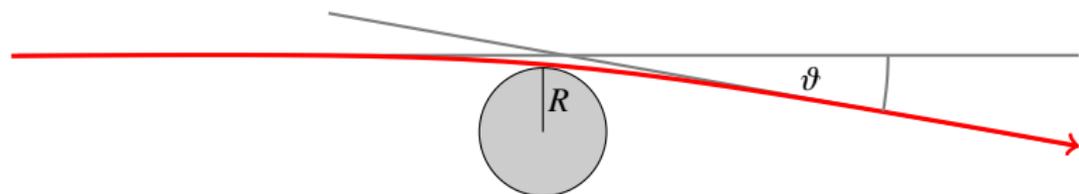
John C. Baez & Emory F. Bunn, *Am. J. Phys.* **73** (2005), 644-652;  
<http://arxiv.org/abs/gr-qc/0103044>

# Klassische Effekte

- 1 Gravitations-Rotverschiebung
- 2 Lichtablenkung durch Massen
- 3 Periheldrehung
- 4 Shapiro-Effekt

... davon am schultauglichsten (allein aus Äquivalenzprinzip ableitbar!): Gravitations-Rotverschiebung

# Lichtablenkung



Rechnungen im Rahmen der ART ergeben (im Bogenmaß):

$$\vartheta = \frac{4GM}{c^2 R}.$$

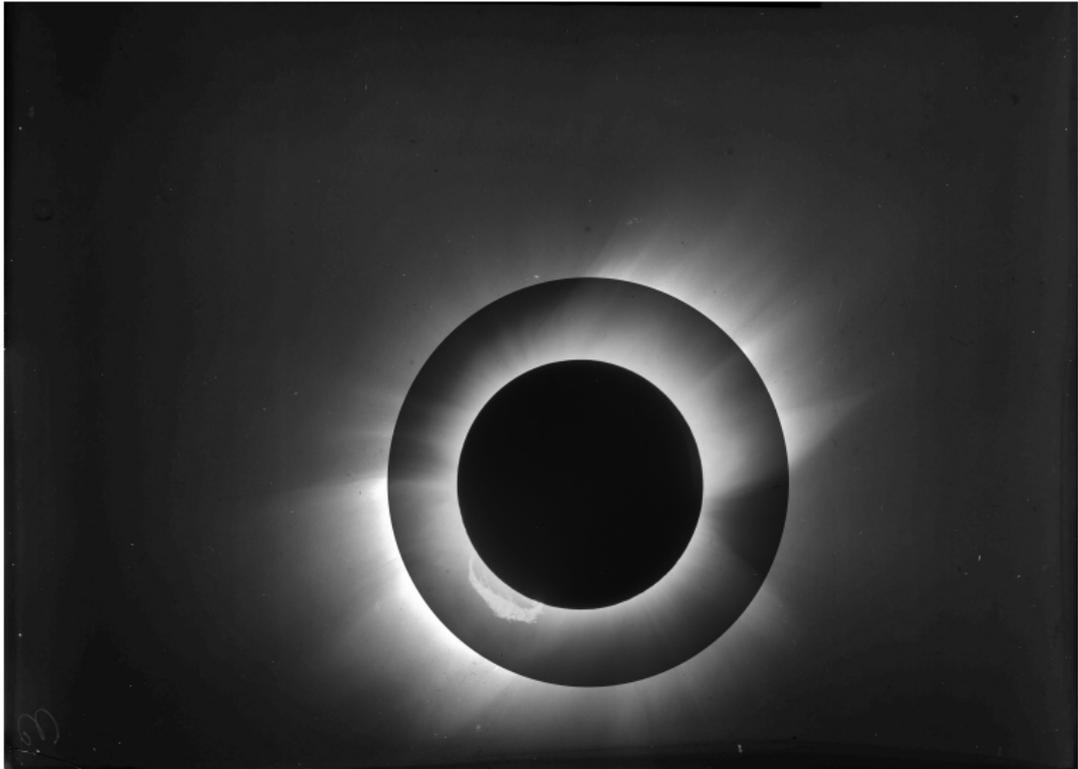
Newton'sche Rechnungen (geben nur den halben Wert) lassen sich in der Schule insbesondere mit einfachen Dimensionsbetrachtungen, exakt über Kepler'sche Hyperbelbahnen herleiten.

Auch Lichtlaufzeit-Verzögerung (Shapiro-Effekt) hat Newton'sches Analogon.

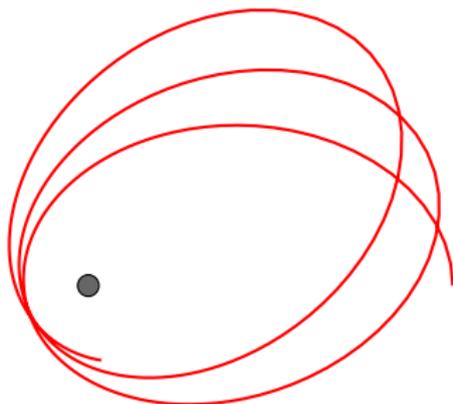
# Systematische Tests: Lichtablenkung



# Systematische Tests: Lichtablenkung



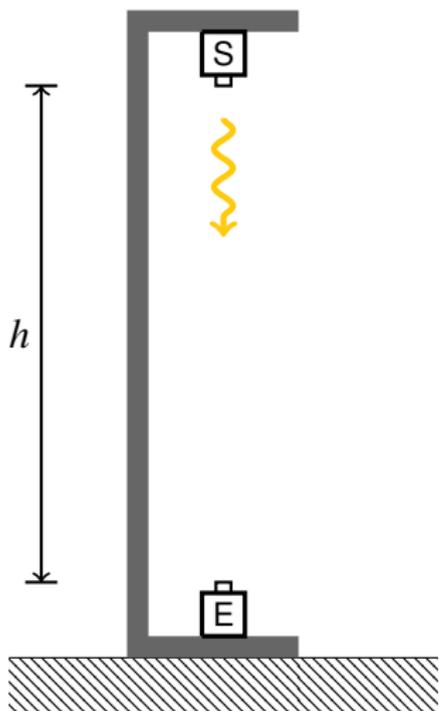
# Periheldrehung



Sonnensystem: größter Effekt bei Merkur, anomale Periheldrehung von  $43''$  pro Jahrhundert (anomal = zusätzlich zu den Gravitationseffekten der anderen Planeten)

Doppelpulsar PSR J0737-3039 als sehr kompaktes System (zwei Neutronensterne, die beide Pulsare sind): relativistische Periheldrehung von  $16,9^\circ$  pro Jahr!

# Gravitations-Rotverschiebung



Situation: Licht fällt im Schwerfeld der Erde senkrecht nach unten. Direkt aus Äquivalenzprinzip ableitbar:  
Wellenlängenverschiebung

$$z \equiv \frac{\lambda_E - \lambda_S}{\lambda_S}$$

ist gegeben durch

$$z = -\frac{gh}{c^2} = -\frac{\Delta\Phi}{c^2},$$

bei  $g \sim 9,81 \text{ m/s}^2$  der Gravitationsbeschleunigung und der Potentialdifferenz  $\Delta\Phi = \Phi(r_S) - \Phi(r_E)$ .

Direkte Konsequenz: Gravitations-Zeitdilatation für Uhren im Schwerfeld.

# Relativität und GPS

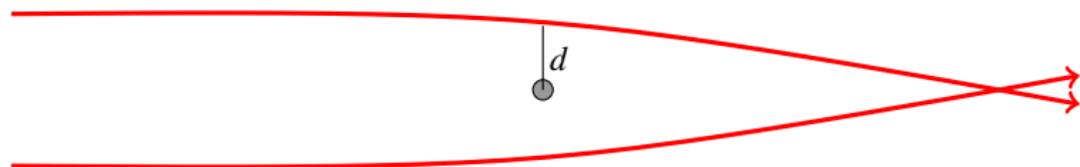
Mit Schulmitteln berechenbar: Gangunterschied irdische vs. GPS-Satellitenuhren.

Lösung der GPS-Konstrukteure: normale Grundfrequenz der verwendeten Atomuhren ist  $10,23 \text{ MHz}$ ; Satellitenuhren sind aber eingestellt auf

$$10,229999995453 \text{ MHz.}$$

Andernfalls nach einer Woche Abweichungen in der Größenordnung von  $1 \text{ m}$  (vergleichbar anderen systematischen Fehlern bei GPS). Vorsicht, es gibt eine beliebte, aber falsche Rechnung, die deutlich größere Werte ergibt!

# Gravitationslinsen



Lichtablenkung kann zu optischer Verstärkung/Vergrößerung bzw. Verzerrung führen; Grundgleichung Ablenkungswinkel (im Bogenmaß) von

$$\vartheta = \frac{4GM}{c^2 d}$$

für Lichtstrahlen, die um  $d$  vom „Linsenzentrum“ parallelversetzt sind.

Einfache Rechnungen mit ortsabhängigem Brechungsindex möglich; Einstein-Ring-Radius berechenbar; einfache Glas-Modelle möglich, vgl. Workshop Ina Rieck

# Schwarze Löcher

Kompakte Regionen, aus denen noch nicht einmal Licht entkommen kann; astrophysikalisch wichtig, da Akkretion (Materie fällt auf Schwarzes Loch, sammelt sich in Scheibe) der Motor für AGN, Mikroquasare ist

Für die Schule tauglich: Fluchtgeschwindigkeitsrechnung; Flussmodell (cf. <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0411060>), Abschätzung Wirkungsgrad Akkretion.

Schöne Beispiele für Geometrie und Optik auf <http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/>

Vgl. Workshops Ina Rieck, Olaf Fischer

# Gravitationswellen

Wellenartige Störungen, breiten sich mit Lichtgeschwindigkeit aus;  
Analogie zu elektromagnetischen Wellen (aber: nicht Dipol,  
sondern Quadrupol)

Nobelpreis 1993 für indirekten Nachweis (Effekte auf Bahn eines  
Binärpulsars)

Zukünftig: Gravitationswellen als astronomischer  
Informationsträger, „Gravitationswellen-Astronomie“

Vgl. Workshop Johannes Fröschle und Kai Müller, Präsentation  
Hans-Peter Nollert

# Kosmologie

Weltmodelle auf Basis der Allgemeinen Relativitätstheorie –  
Expansion des Universums und der Urknall

Schule: Dynamik von Universen mit Newton'schem  
Gravitationsgesetz gut ableitbar, Milne-Universum als  
speziell-relativistisches Modell für Raumexpansion

Vgl. Vortrag Björn Malte Schäfer

# Literatur (Auswahl)

Diese Folien plus Ergänzungen:

<http://www.haus-der-astronomie.de/fortbildungen/bundesweit/materialien>

Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule (Aulis): Heft 4/54 (Juni 2005): *Didaktik der Relativitätstheorien*

Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule (Aulis): Heft 7/54 (Oktober 2005): *Einstein – fächerübergreifend*

Astronomie + Raumfahrt im Unterricht: Themenheft *Kosmologie* (Heft 107, Ausgabe 5, Oktober 2008; Friedrich-Verlag)

Uwe Schröter, „ART mit Mitteln der Schulmathematik“ in K.-H. Lotze, W. B. Schneider (Hg) *Wege in der Physikdidaktik* Bd. 5 (2002),  
<http://www.solstice.de>.

Karl-Heinz Lotze, „Das Weltmodell der Newtonschen Kosmologie“ *ibid*

Markus Pössel, *Das Einstein-Fenster*. Hoffmann & Campe 2005.

*Einstein Online*: <http://www.einstein-online.info>