Mechanik und Geometrie der Speziellen Relativitätstheorie

Vom Schwarzen Loch bis zum Urknall: Einsteins Astrophysik für Nicht-Physiker

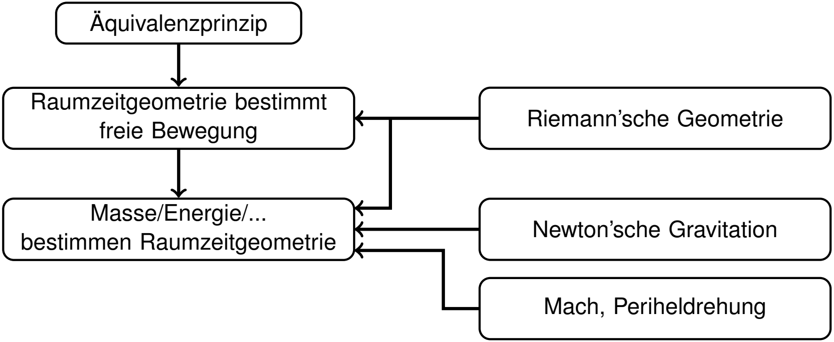
Markus Pössel & Björn Malte Schäfer

Haus der Astronomie/Institut für Theoretische Astrophysik

5.11.2015

Inhalt

Struktur Allgemeine Relativitätstheorie



Ergebnis: **Einstein'sche Feldgleichungen**

Geometrie in der klassischen Mechanik

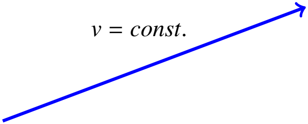
Klassische Mechanik = Mechanik nach Newton

Zunächst: Überblick

Dann: Welche Rolle spielt darin die Geometrie? Was passiert bei Koordinatenwechsel?

Newton'sche Mechanik

Natürlicher (=freier) Bewegungszustand: Geradlinige, gleichförmige Bewegung (Obacht: in geeignetem Bezugssystem)



Abweichungen von der freien Bewegung entsteht durch Einfluss von Kräften,

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

mit $\vec{a}$ der Beschleunigung (also Änderung des Geschwindigkeitsbetrags ebenso wie der Richtung der Geschwindigkeit).

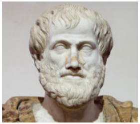
Newton’sche Mechanik

Teil der Mechanik: Explizite Modelle für verschiedene Arten von Kraft (Gravitation, Elektrodynamik, Reibungskräfte) – wie üben Körper etc. aufeinander Einflüsse aus?

Geeignete Wahl des Bezugssystems (Inertialsystem) beinhaltet: Unterscheidung von „richtigen Kräften“ und Trägheitskräften (d.h. solchen, die sich alleine durch die Wahl des Bezugssystems zum Verschwinden bringen lassen: Zentrifugalkraft, Corioliskraft, Eulerkraft)

Newton vs. Aristoteles

vs.



(Irdische) Gegenstände in Bewegung: bei Newton natürliche Bewegung für $v = const.$ und geradlinig. Aristoteles: Antrieb nötig

(Irdische) Gegenstände, die langsamer werden und anhalten: bei Aristoteles natürliche Bewegung, bei Newton Reibungskräfte

Bei Aristoteles: Unvergängliche, himmlische Vorgänge haben eigene Eigenschaften. Bei Newton: In beiden Fällen natürliche Bewegung plus Kräfte.

Newton'sche Gravitation

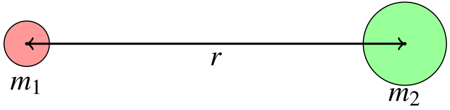
Newtons Gesetz für die Schwerkraft (Gravitation): Zwei Punktmassen m_1, m_2 im Abstand r voneinander ziehen sich mit einer Kraft der Stärke

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

an.

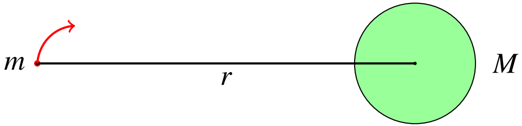
G ist die Newtonsche Gravitationskonstante,

$$G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ m^3/(kg \cdot s^2).$$



Newton'sche Gravitation

Häufige Situation: $m = m_2 = M \gg m_1$; die Punktmasse m ist ein „Testteilchen", mit dessen Hilfe man das Gravitationsfeld ($\sim$ Einfluss auf alle denkbaren Testteilchen) eines größeren Körpers der Masse M kartiert.



Beispiel: Gravitationsbewegung/-statik im Schwerefeld der Erde (irdische Körper) oder im Schwerefeld der Sonne (Planeten, Kometen).

Newton’sche Gravitation

Geometrische Elemente der Beschreibung:

Kräftefreie Objekte laufen auf geraden Bahnen (also auf den kürzestmöglichen Verbindungen der daraufliegenden Punkte).

Geometrische Deutung für „konstante Geschwindigkeit“? Geraden im Raumzeitdiagramm, aber keine vernünftige Metrik.

Geometrie der Speziellen Relativitätstheorie

Wie von Björn Schäfer letzte Vorlesung eingeführt:

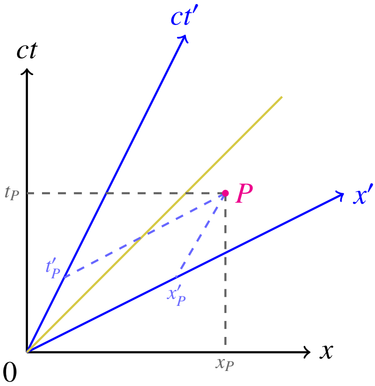
Aus **Relativitätsprinzip** und **Konstanz der Lichtgeschwindigkeit** folgt ein Weltbild mit unendlich vielen gleichberechtigten Bezugssystemen (den **Inertialsystemen**), die über die **Lorentztransformationen** verknüpft sind.

$$
\begin{aligned}
x' &= \gamma(x - \beta \cdot ct) \\
ct' &= \gamma(ct - \beta x)
\end{aligned}
$$

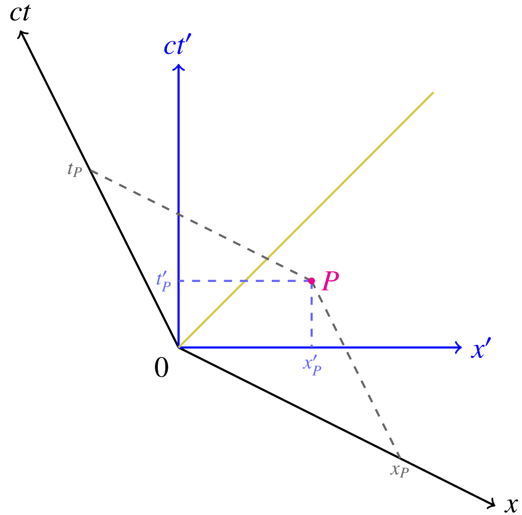
mit

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{und} \quad \beta = v/c.$$

Geometrie der Speziellen Relativitätstheorie



Geometrie der Speziellen Relativitätstheorie



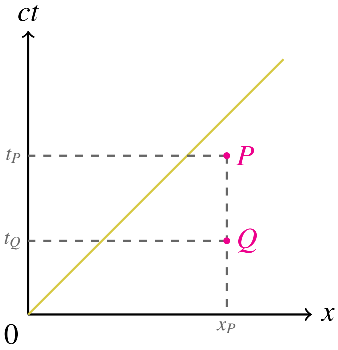
Geometrie der Speziellen Relativitätstheorie

Beide Darstellungen sind möglich – wir haben es wiederum nicht mit abstandstreuen Diagrammen zu tun und wissen zu diesem Zeitpunkt gar nicht recht, was der Abstand zwischen zwei Ereignissen überhaupt sein soll.

Sprich: Wir brauchen eine **Metrik**!

Einfache Arten von Abstand: Zeitdifferenz

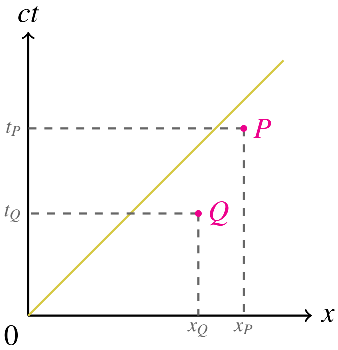
Zeitabstand $t_P - t_Q$: Zeitkoordinatendifferenz ≡ Zeit, die auf einer in $x_Q = x_P$ ruhenden Uhr zwischen dem Ereignis Q und dem Ereignis P vergeht:



Einfache Arten von Abstand: Zeitartiger Abstand

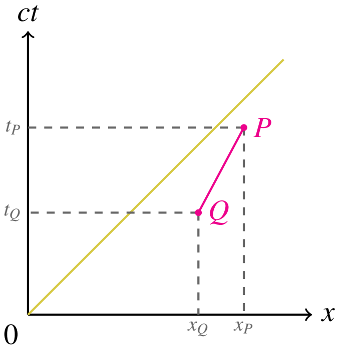
Was machen wir stattdessen mit zwei Ereignissen P und Q an leicht unterschiedlichem Ort, mit

$$\frac{|x_P - x_Q|}{|t_P - t_Q|} < c?$$



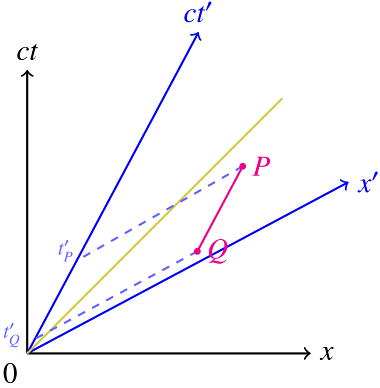
Einfache Arten von Abstand: Zeitartiger Abstand

Wir schicken eine Uhr mit der Geschwindigkeit $v = |x_P - x_Q|/|t_P - t_Q|$ vom einen Ort zum anderen und lesen darauf die Zeitdifferenz ab (=Eigenzeit-Intervall auf der betreffenden Uhr)!



Einfache Arten von Abstand: Zeitartiger Abstand

Alternativ-gleichwertig: Führe ein Koordinatensystem ein, in dem P und Q am selben Ort stattfinden!



Einfache Arten von Abstand: Zeitartiger Abstand

Abstand = Zeit, die auf bewegter Uhr vergangen ist, ausrechnen: Nutze Lorentz-Transformationen

$$x' = \gamma(x - \beta \cdot ct), \qquad ct' = \gamma(ct - \beta x), \qquad \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}, \qquad \beta = v/c$$

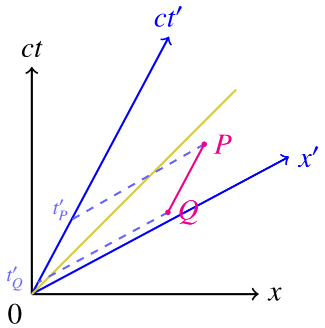
mit Abkürzungen $\Delta t \equiv t_P - t_Q$ und $\Delta x \equiv x_P - x_Q$ sowie $v = \Delta x/\Delta t$:

$$c\Delta t' = \gamma(c\,\Delta t - \beta\Delta x)$$

$$\Rightarrow c^2\Delta t'^2 = \frac{c^2\,\Delta t^2 - 2c\beta\,\Delta x\,\Delta t + \beta^2\,\Delta x^2}{1-\beta^2}$$

$$= \frac{c^2\,\Delta t^2 - c^2\beta^2\,\Delta t^2 - \Delta x^2 + \beta^2\,\Delta x^2}{1-\beta^2} = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2.$$

Einfache Arten von Abstand: Zeitartiger Abstand

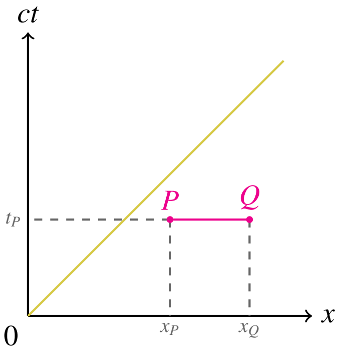


$$c^2\,\Delta t'^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 \quad\Rightarrow\quad \Delta t' = \sqrt{1-(v/c)^2}\,\Delta t \quad < \Delta t.$$

Dieser Effekt heißt **relativistische Zeitdilatation**. Verkürzte Fassung: Bewegte Uhren gehen langsamer.

Einfache Arten von Abstand: Ortsdifferenz

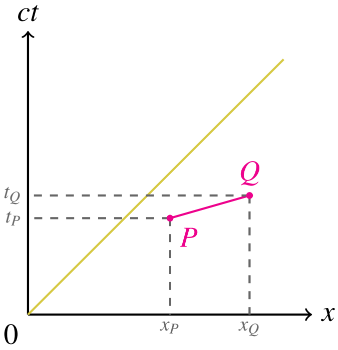
Wenn $t_Q = t_P$: Abstand in x-Richtung $x_P - x_Q$: Raumkoordinatendifferenz ≡ Länge der Verbindungsstrecke zwischen dem Ort von P und dem Ort von Q, gemessen mit einem in unserem Bezugssystem ruhenden Maßstab.



Einfache Arten von Abstand: Raumartiger Abstand

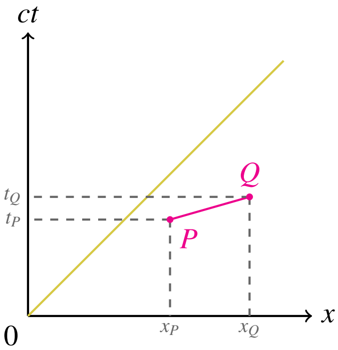
Was machen wir stattdessen mit zwei Ereignissen P und Q zu leicht unterschiedlichen Zeiten, mit

$$\frac{|x_P - x_Q|}{|t_P - t_Q|} > c?$$

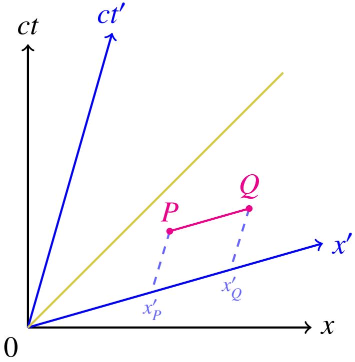


Einfache Arten von Abstand: Raumartiger Abstand

Wir finden ein System, in dem die beiden Ereignisse gleichzeitig stattfinden, und messen dort den räumlichen Abstand!



Einfache Arten von Abstand: Raumartiger Abstand



Räumlicher Abstand im System mit $v = c^2\,\Delta t/\Delta x$ ist $\Delta x' = x'_Q - x'_P$.

Einfache Arten von Abstand: Raumartiger Abstand

Abstand = Zeit, die auf bewegter Uhr vergangen ist, ausrechnen: Nutze Lorentz-Transformationen

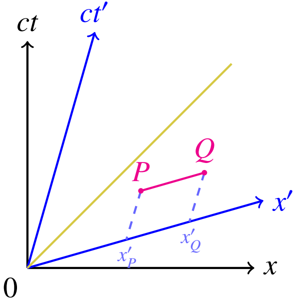
$$x' = \gamma(x - \beta \cdot ct), \qquad ct' = \gamma(ct - \beta x), \qquad \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}, \qquad \beta = v/c$$

mit Abkürzungen $\Delta x \equiv x_P - x_Q$ und $\Delta t \equiv t_P - t_Q$ sowie $v = c^2 \Delta t/\Delta x$:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c\, \Delta t)$$

$$\begin{aligned} \Delta x'^2 &= \frac{\Delta x^2 - 2\beta c\, \Delta x\, \Delta t + \beta^2 c^2\, \Delta t^2}{1-\beta^2} \\ &= \frac{\Delta x^2 - \beta^2\, \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 + \beta^2 c^2\, \Delta t^2}{1-\beta^2} = \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 \end{aligned}$$

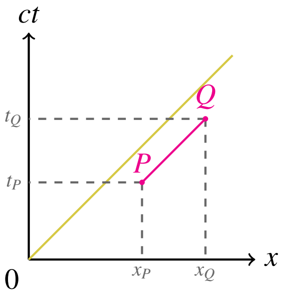
Einfache Arten von Abstand: Raumartiger Abstand



$$\Delta x'^2 = \Delta x^2 - c^2\Delta t^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta x' = \sqrt{1-(v/c)^2}\,\Delta x < \Delta x$$

Im Kontext der Längenmessung bewegter Objekte heißt das **Längenkontraktion**.

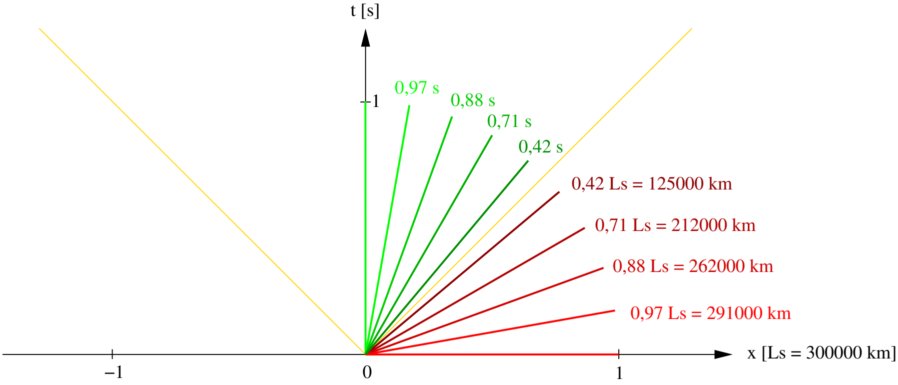
Einfache Arten von Abstand: Lichtartiger Abstand



Direkt ablesbar:

$$0 = \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta x = c\,\Delta t.$$

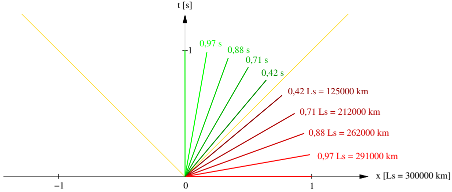
Die Lorentz-Metrik der SRT



$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2.$$

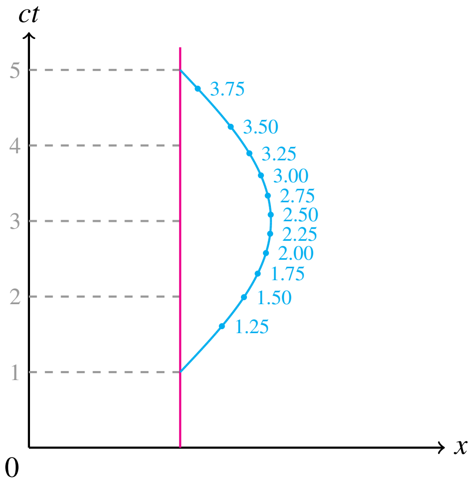
Die Lorentz-Metrik der SRT

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}\tau^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - c^2\mathrm{d}t^2.$$



- **zeitartig**, $\mathrm{d}s^2 < 0$: mögliche Weltlinie von Teilchen ($m > 0$)
- **lichtartig**, $\mathrm{d}s^2 = 0$: Lichtkegel
- **raumartige**, $\mathrm{d}s^2 > 0$: mögliche räumliche Distanz

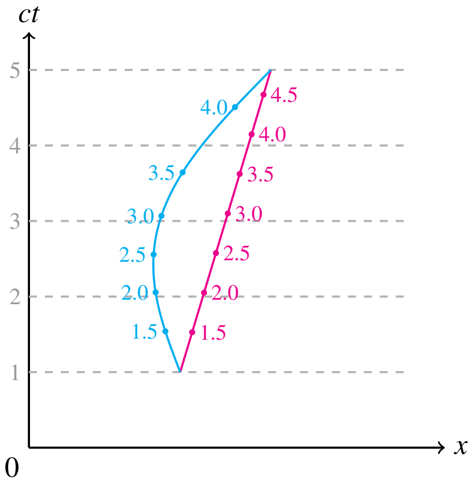
Zwillingseffekt



Zwillingseffekt, klassische Version: Eine Uhr bleibt wo sie ist, eine baugleiche Uhr begibt sich auf eine Rundreise – links sind die Weltlinien eingezeichnet.

Effekt: Auf der rundreisenden Uhr ist beim erneuten Zusammentreffen weniger Zeit vergangen als auf der gereisten Uhr (im Beispiel: $3{,}84$).

Zwillingseffekt



Dasselbe gilt allgemeiner: Sind zwei Ereignisse durch einen Geradenabschnitt und eine andere Kurve verbunden, vergeht entlang des Geradenabschnitts mehr Zeit!

Hier:

Geradenbahn: 4,82
Kurve: 4,12

Geradenbahnen als Extremalbahnen

Das bedeutet aber auch: Wir haben die Möglichkeit, Raumzeitgeraden durch ein Extremalprinzip zu beschreiben (analog zu: Raumgeradenabschnitte sind kürzeste Verbindungen):

Raumzeitgeraden sind diejenigen Bahnkurven, entlang derer am meisten Eigenzeit vergeht

Auf die Mechanik übertragen:

Trödelprinzip: Teilchen, auf die keine äußeren Kräfte wirken, folgen denjenigen Bahnkurven (Weltlinien), entlang derer am meisten Eigenzeit vergeht