Grundlagen ART: Koordinaten und gekrümmte Flächen

Vom Schwarzen Loch bis zum Urknall: Einsteins Astrophysik für Nicht-Physiker

Markus Pössel & Björn Malte Schäfer

Haus der Astronomie/Institut für Theoretische Astrophysik

22.10.2015

Zunächst noch etwas ganz anderes

Baden-Württembergs Schulen: Astronomie auf dem Rückzug?

http://www.haus-der-astronomie.de/bildungsplan2016

Inhalt

Allgemeine Relativitätstheorie

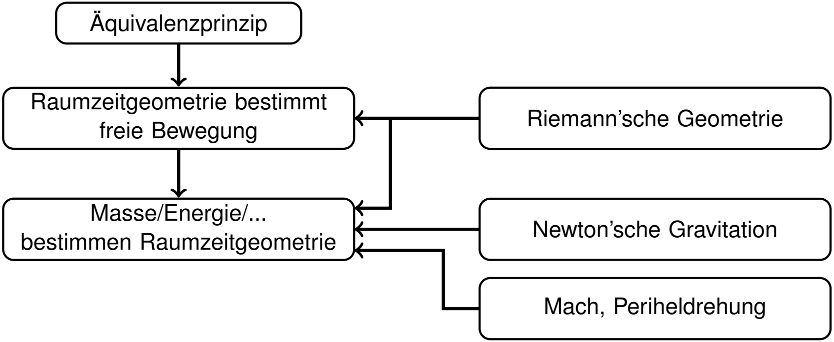
Albert Einsteins Gravitationstheorie, fertiggestellt November 1915

Gravitation ist keine Kraft, sondern Eigenschaft der Raumzeit-Geometrie

„Die Raumzeit sagt der Materie, wie sie sich bewegen soll; die Materie sagt der Raumzeit, wie sie sich verzerren soll“
(nach John Wheeler)

Anwendungen: Relativistische Effekte im Sonnensystem, Gravitationslinsen, Gravitationswellen, Schwarze Löcher, Kosmologie

Struktur Allgemeine Relativitätstheorie



Ergebnis: **Einstein’sche Feldgleichungen**

Unterschiedliche Perspektiven

Unterschiedliche Blickweisen auf die Allgemeine Relativitätstheorie:

- Verallgemeinerung grundlegender physikalischer Prinzipien (Einstein und Nachfolger)
- Nötig für Modelle von Gravitationslinsen, Schwarzen Löchern, Kosmologie (Astrophysiker)
- Interessante Anwendung der Riemann'schen Geometrie bzw. von Differentialgleichungen (Mathematiker)
- Kleine Korrekturen zur Newton'schen Gravitation (Himmelsmechaniker)
- Interessante Herausforderung für Simulationen (Numeriker)

Grundideen

- Gravitation (zum Teil) als Scheinkraft: Äquivalenzprinzip
- Verallgemeinerung der Mechanik (wie bewegen sich Körper?)
- Newton'sche Gravitation als Grenzfall
- Geometrische Beschreibung
- **Relativität und Invarianz**

Relativität und Invarianz

Grundfrage ist universell — auch jenseits der Physik:

Was ist essenziell, was ist austauschbar?

Beispiele anderswo:

- Bilder, Gemälde etc. eines Objekts
- Beschreibende Texte
- Begriffe und Definitionen
- Inhalt vs. Form einer Nachricht
- Information allgemein

Relativität und Invarianz

Schema für Austauschbarkeit vs. Essenz

Beispiel Texte, die dasselbe (?) beschreiben:

Textversion 1 ⟷ Textversion 2

Abbildung zwischen Texten — bei Übersetzung (fast) Satz für Satz möglich. Ob es sich um eine Übersetzung/Umformulierung oder Veränderung handelt, entscheidet sich an den essenziellen Teilen des Inhalts.

Was ist essenziell? Bei Texten schwer abgrenzbar („Angela Merkel gab die Anweisung, die Grenzen zu öffnen“ ja, „Angela Merkel trug ein blaues Sakko“ eher nicht)

Relativität und Invarianz

Allgemeine Situation: Verschiedene **Instanzen**; Einigung darüber, was **essenziell** ist; **Abbildung** zwischen den Instanzen, bei denen das Essenzielle erhalten bleibt.

Beschreibungsrahmen ist **umfassend**: Sprache kann viel mehr beschreiben als diesen einen Inhalt. (Das ist Quelle für nicht-essenzielles!)

Oft: viele Instanzen **gleichberechtigt**. Beispiel: Definition von Dingen, Beschreibung von Ereignissen.

Auf die Abbildung bezogen: Das Essenzielle ist **invariant**; was nicht essenziell (kontingent, nicht wesensnotwendig) ist, ist **relativ**.

Relativität und Invarianz

Essenzialität plus gleichberechtigte Instanzen plus umfassender Beschreibungsrahmen führt zur

Grundkonstellation der Relativität: Wo Instanzen nötig sind, kann man sich nicht auf das Essenzielle beschränken! Kenntnis einer Instanz plus der Arten von Relativität ist das beste, was man erreichen kann!

Unterschiedliche Stufen bei Essenzialität

Je nach Anspruch sind in ähnlicher Situation unterschiedliche Stufen der Essenzialität möglich.

Beispiel Texte:

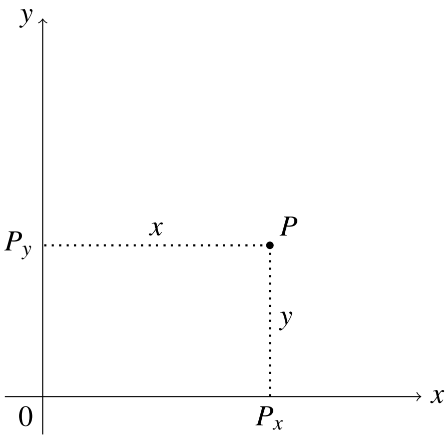
- Physische Manifestation wichtig (Gutenberg-Bibel, Manuskripte)
- Orginaltext wichtig (insbesondere Belletristik, allenfalls Übersetzungen)
- Inhalt wichtig (Umformulierungen/verschiedene Versionen)

Mathematisch-physikalische Beispiele

Vorteil: Bestandteile (Essenzialität, Relativität, Invarianz) exakt und einfach formulierbar!

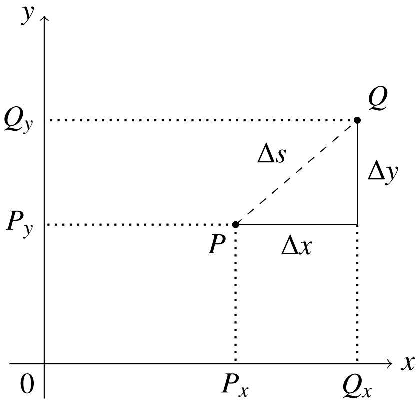
Rahmen	invariant / essenziell	relativ / kontingent
Ebene Geometrie	Abstände	Koordinatenwerte
Klassische Mechanik	Abstände, Längen, Zeiten, Geradheit	Geschwindigkeiten
SRT	Ruhelängen, Eigenzeiten, Lichtgeschw., Geradheit	Geschwindigkeiten, Längen, Zeiten
Gekrümmte Geometrie	Abstände entlang Kurven, Extremaleigenschaften	Koordinatenwerte
ART	Eigenabstände, Eigenzeiten, Lichtgeschwindigkeit und Geradheit im freien Fall	Geschwindigkeiten, Geradheit, Längen, Zeiten

Kartesisches x-y-Koordinatensystem



Punkt P bekommt Koordinatenpaar (x, y) zugeordnet.

Abstände in kartesischen Koordinaten

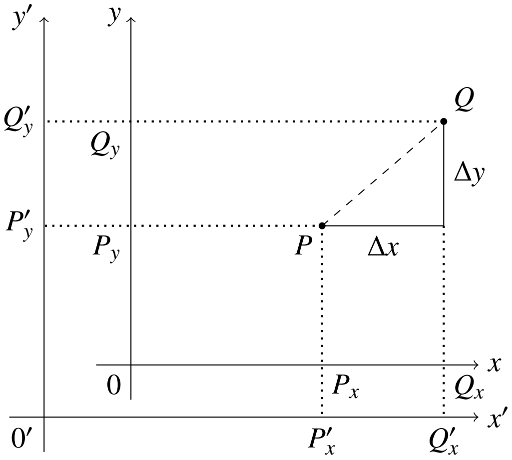


Abstand berechenbar:

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Verschiedene kartesische Koordinatensysteme

Wechsel von einem Koordinatensystem in ein anderes:



Wechsel zw. kartesischen Koordinatensystemen

Koordinatensysteme sind **umfassend**: Jedem Punkt in der Ebene/im Raum sind eindeutig Koordinatenwerte zuweisbar

Essentiell sind die Abstände zwischen Punkten

Relativ sind x- und y-Koordinatenwerte für gegebene Punkte

Abbildung zwischen kartesischen Koordinatensystemen: Verschiebungen, Rotationen

Grundkonstellation: Raum im allgemeinen nur mithilfe von Koordinaten beschreibbar – aber Wahl von Koordinatenachsen zwangsläufig willkürlich

Die Dreifach-Rolle von Koordinaten

1. Koordinaten sind ein **Namensschema**. Durch die Angabe eines Rezepts, wie man jedem Punkt der Ebene zwei Zahlen zuordnet (bzw. jedem Punkt auf dem Zahlenstrahl eine Zahl, oder im Raum drei Zahlen) kann man unendlich viele Raumpunkte eindeutig bezeichnen.

2. Koordinaten erlauben es, **Nähe** auszudrücken. Der Punkt mit kartesischen Koordinaten $(1, 0)$ liegt näher am Nullpunkt als der Punkt mit Koordinaten $(2, 0)$. Mathematisch gesehen definieren solche Nähe-Beziehungen (ohne quantitativ Abstände anzugeben) eine *topologische Struktur*.

3. Koordinaten erlauben es, **Abstände** auszurechnen – im kartesischen Fall mit einfacher Dreiecksrechnung im (abstandstreuen) Koordinatendiagramm, im allgemeineren Fall mithilfe einer Zusatzgröße, der *Metrik*.

Schreibweise für Abstände

Übliche Notation: Schreibe hin, wie Abstandsquadrate mit Koordinatendifferenzen zusammenhängen: Aus

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

wird

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2.$$

Solche Ausdrücke $\mathrm{d}s^2$ werden uns im folgenden immer wieder begegnen.

Vorschrift, wie man aus kleinen Koordinatendifferenzen kleine Abstände ausrechnet, heißt **Metrik**.

(Von griechisch $\mu\acute{\epsilon}\tau\rho o\nu$, Maß.)

Schreibweise für Abstände

Metrik

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$$

Mathematisch gesehen ist die Metrik eine Funktion von Koordinatendifferenzvektoren

$$\mathrm{d}\vec{r} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}$$

und zwar eine quadratische Form

$$\mathrm{d}s^2 = g(\vec{v}) : V \to \mathbb{R}$$

bzw. alternativ eine Bilinearform

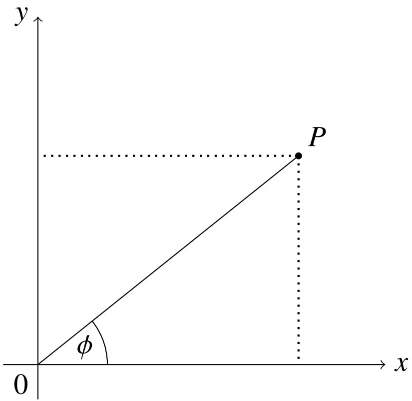
$$g(\vec{v}, \vec{w}) : V \times V \to \mathbb{R}.$$

Im einfachen (euklidischen) Fall: Bilinearform ist Skalarprodukt,

$$g(\vec{v}, \vec{w}) = v_x w_x + v_y w_y = \vec{v} \cdot \vec{w}.$$

Nichtkartesische Koordinaten

Beispiel: Polarkoordinaten

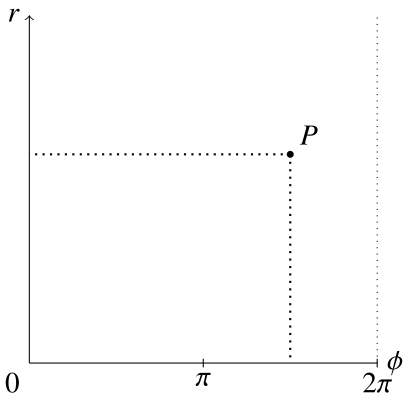


$$\begin{aligned} x &= r\cos(\phi) \\ y &= r\sin(\phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi &= \tan^{-1}(y/x) \end{aligned}$$

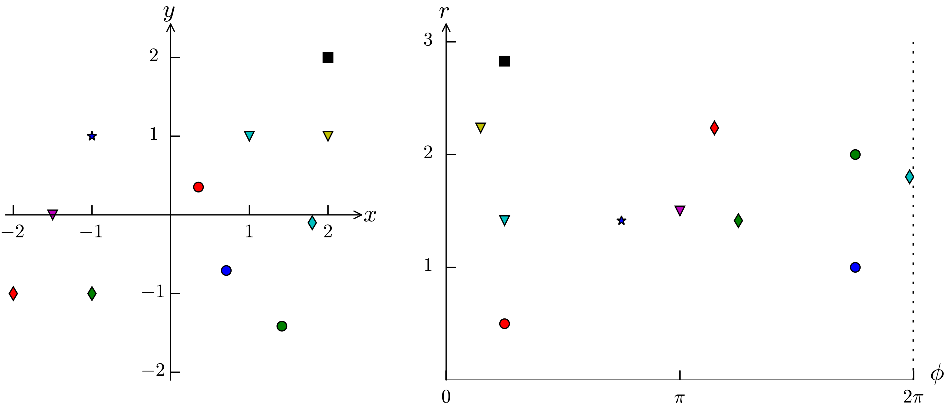
Polarkoordinaten

Auch Polarkoordinaten sind Koordinaten: Jedem Punkt ist ein Wertepaar (r, ϕ) zugeordnet. Solche Wertepaare kann man genau so in eine Ebene auftragen wie kartesische Koordinaten:



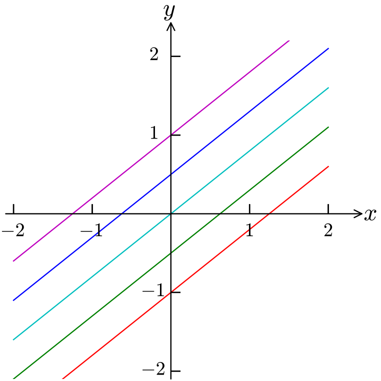
Polarkoordinaten

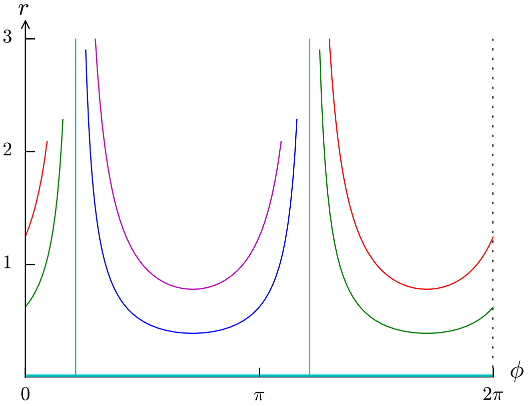
Vergleich: Dieselben Punkte kartesisch vs. polar:



Polarkoordinaten

Einige Merkwürdigkeiten:





Dies sind nur auf einem Teil der Ebene gute Koordinaten!

Exkurs: Teil-Koordinaten?

Aus der Sprache der Geographie entlehnt: Karte vs. Atlas

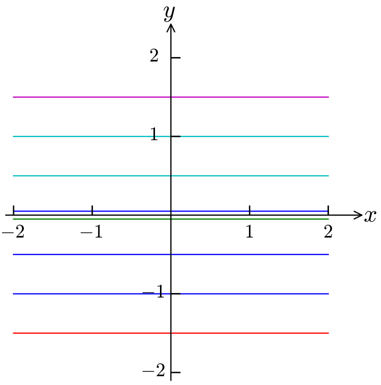
Koordinaten, die einen Teil der Ebene (des Raums, etc.) gut beschreiben bilden eine **Karte**

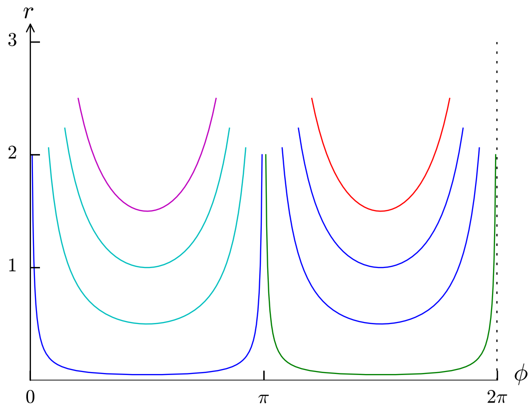
Ein Satz von Karten, die zusammengenommen die gesamte Ebene überdecken und sich in allen Grenzbereichen überschneiden, heißt **Atlas**

Karten müssen in den Überschneidungsgebieten zusammenpassen (eindeutige Abbildung von einem Koordinatensystem ins andere und umgekehrt) — dann ist alles gut!

Polarkoordinaten

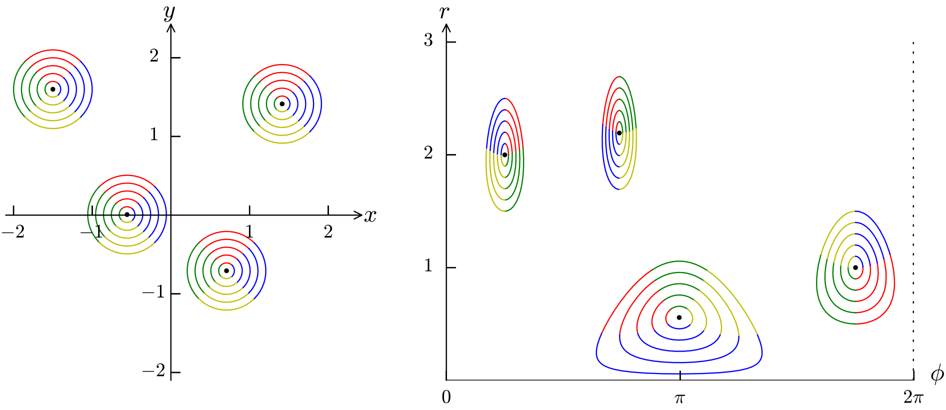
Vergleich: Geraden:





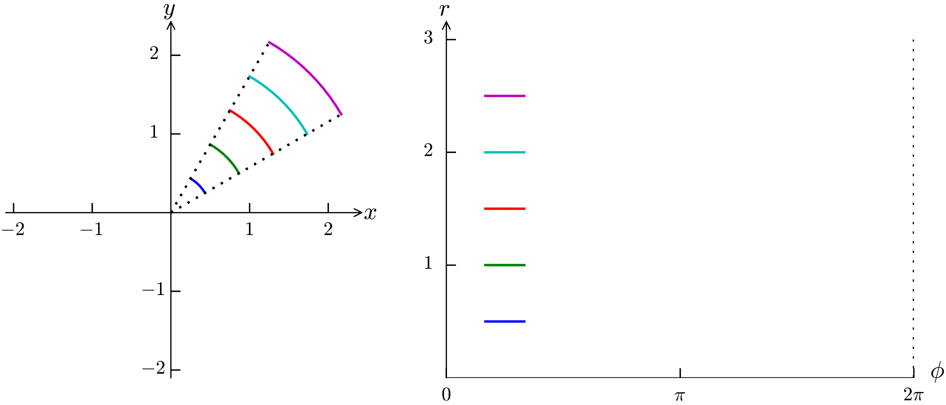
Polarkoordinaten

Vergleich: Umkreise von Punkten:



Polarkoordinaten

Offenbar werden Abstände verzerrt dargestellt!



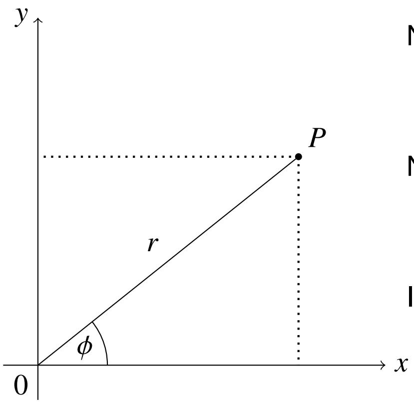
Metrik für Polarkoordinaten

Lösung: Wir brauchen wieder eine **Metrik**. Diesmal nicht

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}\phi^2$$

(dann wäre das Koordinatendiagramm abstandstreu!) sondern eine etwas kompliziertere Form.

Metrik für Polarkoordinaten



Nur r ändern:

$$ds = dr.$$

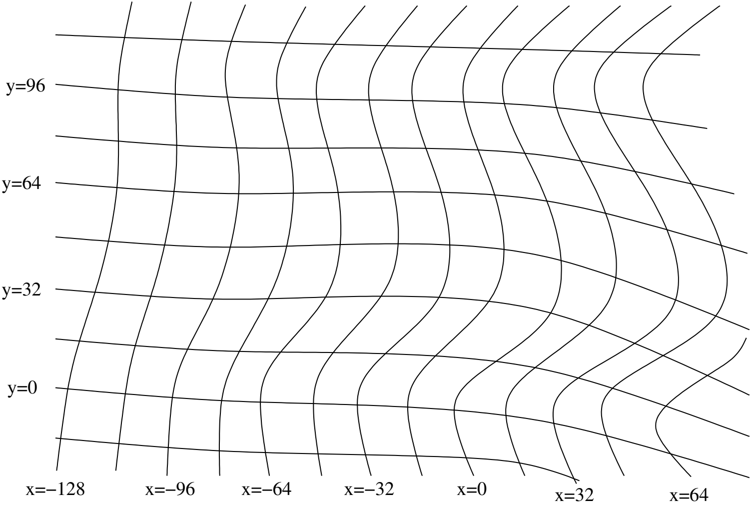
Nur φ ändern:

$$ds = r d\phi.$$

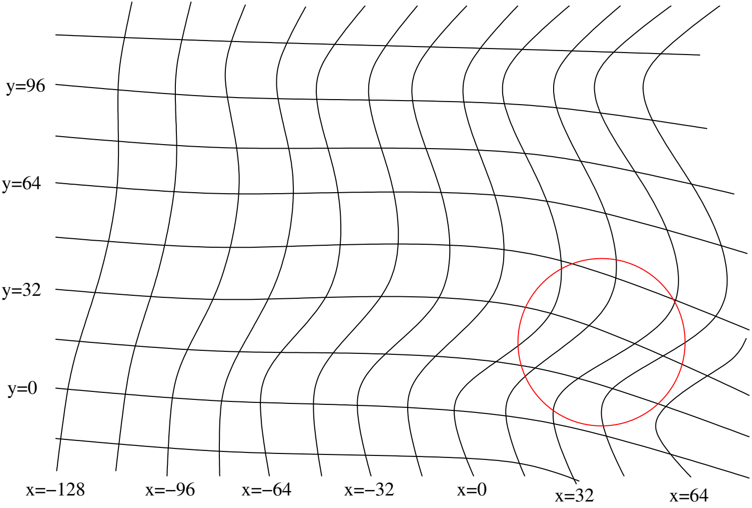
Insgesamt :

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2.$$

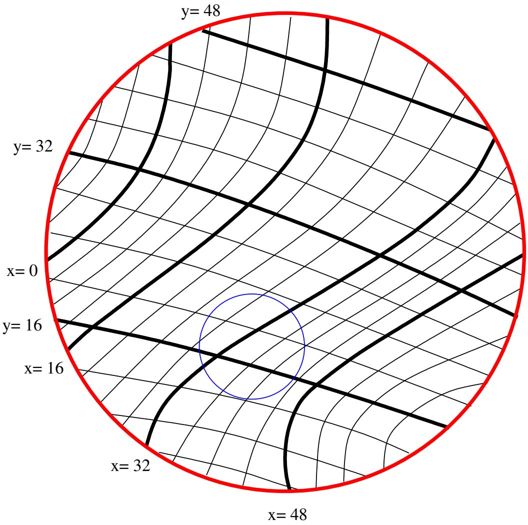
Allgemeine Koordinaten



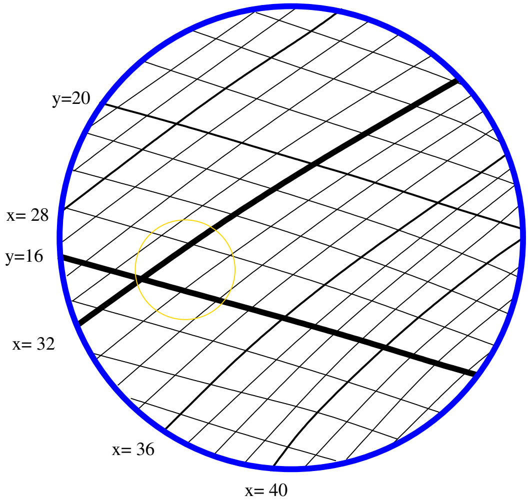
Allgemeine Koordinaten: Hineinzoomen



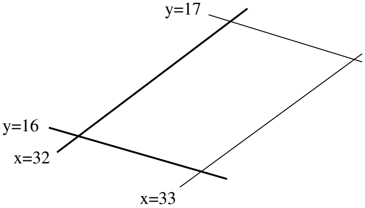
Allgemeine Koordinaten: Hineinzoomen



Allgemeine Koordinaten: Hineinzoomen

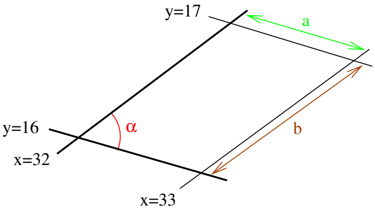


Allgemeine Koordinaten: Geometrische Beschreibung



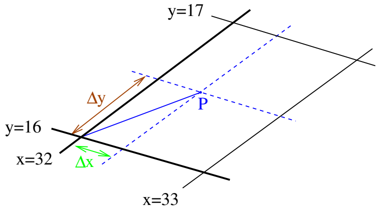
Das ist recht einfach: Parallelogramm!

Allgemeine Koordinaten: Elementarzelle



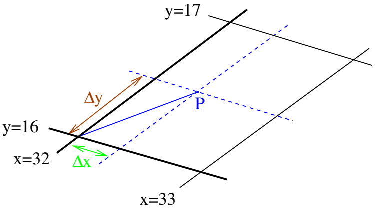
Senkrecht zur (lokal fast ebenen) Oberfläche, längentreue Abbildung: 3 charakteristische Parameter ablesbar

Allgemeine Koordinaten



Wie lang ist die blaue Linie zwischen $(32, 16)$ und P?

Allgemeine Koordinaten



$\vec{P} = (b\,\Delta y)\,\vec{u}_y + (a\,\Delta x)\,\vec{u}_x$ where $\vec{u}_x \cdot \vec{u}_y = \cos\alpha$ means that

$$|\vec{P}|^2 = a^2\,\Delta x^2 + 2ab\,\cos\alpha\,\Delta x \Delta y + b^2\,\Delta y^2.$$

Mit dieser Verbesserung können unsere Koordinaten verwendet werden, um (zunächst im Kleinen) Längen zu messen!

Allgemeine Form der Metrik

$$\Delta s^2 = |\vec{P}|^2 = a^2\,\Delta x^2 + 2ab\,\cos\alpha\,\Delta x\Delta y + b^2\,\Delta y^2$$

Drei unabhängige Parameter - die wir umbenennen:

$$\Delta s^2 = g_{11}\,\Delta x^2 + 2g_{12}\,\Delta x\Delta y + g_{22}\,\Delta y^2.$$

Achtung: Im allgemeinen sind die Koeffizienten ortsabhängig, $g_{ij}(x,y)$. Exakt ist die Formel nur, wenn die Koordinatenumgebung infinitesimal klein ist:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{11}(x,y)\,\mathrm{d}x^2 + 2g_{12}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + g_{22}(x,y)\,\mathrm{d}y^2.$$

$\mathrm{d}s^2$ ist die allgemeine Form der Metrik, die $g_{ij}(x,y)$ heißen metrische Koeffizienten.

Bisherige Beispiele für die Metrik

Euklidisch-kartesische Metrik:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$$

Polarkoordinaten-Form:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\phi^2$$

Allgemeine Form:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{11}(x,y)\,\mathrm{d}x^2 + 2g_{12}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + g_{22}(x,y)\,\mathrm{d}y^2.$$

Metrik und Abstände

Abstand zwischen zwei Punkten P und Q?

Im kartesischen System: Zeichne die Verbindungsgerade ein; messe die Strecke zwischen P und Q aus.

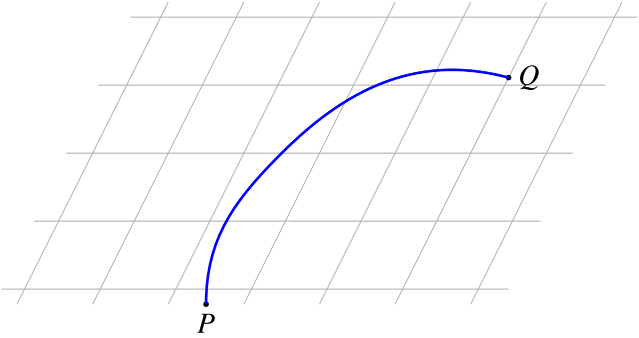
Aber wie wir gesehen haben: Geraden in einem Koordinatensystem sind in anderen Koordinatensystem im allgemeinen keine Geraden!

Wie können wir den Begriff der Geraden verallgemeinen?

Kurven

Kurven allgemein: Linien (i.a. gebogen) auf einer Fläche, können als Verbindungslinien zwischen Punkten dienen

[mathematisch: Funktion $c(\lambda)$ eines Kurvenparameters auf die Fläche, $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, z.B. $\lambda \mapsto (x(\lambda), y(\lambda))$ oder $\lambda \mapsto (r(\lambda), \phi(\lambda))$]



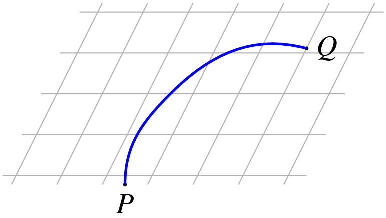
Abstand entlang einer Kurve

Unterteile Kurve in winzige (=infinitesimale) Streckenabschnitte.

Jedem Streckenabschnitt entspricht ein Koordinatendifferenz-Paar $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$

Rechne mithilfe der Metrik $\mathrm{d}s$ aus

Addiere Längen der Streckenabschnitte auf (=Integration entlang der Kurve)

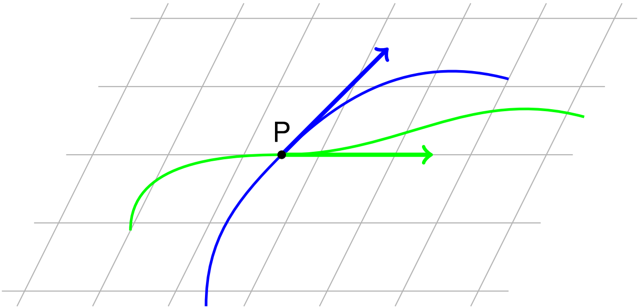


Abstand entlang einer Kurve

Wenn wir Abstände bestimmen können, dann können wir auch die kürzeste Verbindung zweier Punkte finden: **Geodätische** oder **Geodäte**.

Auf Polarkoordinaten angewandt finden wir so mithilfe der Koordinaten und der Metrik diejenigen Kurven, die in kartesischen Koordinaten den Geraden entsprechen.

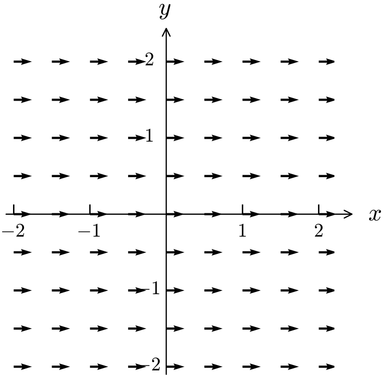
Richtungen definieren

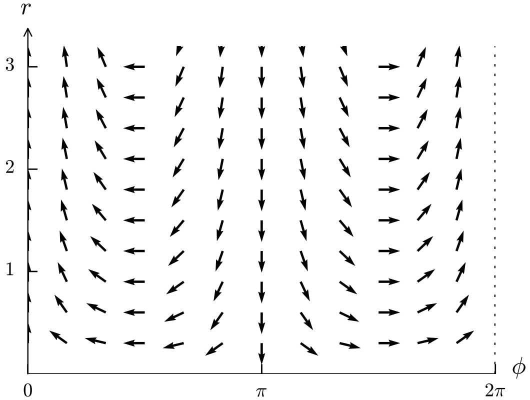


Richtung einer Kurve in einem Punkt: Bestimmbar durch „Hereinzoomen“ (von nahem gesehen sieht jeder [normale] Kurvenabschnitt wie ein Geradenabschnitt aus)

Richtungen: Polarkoordinaten

Auch Richtungen sehen je nach Koordinatenwahl anders aus:





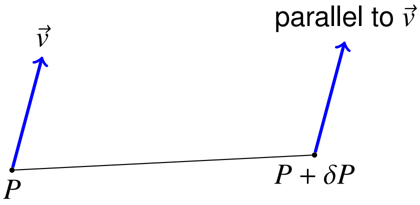
Wie kann man in solch einer Situation feststellen, ob sich eine Richtung ändert?

Paralleltransport

Vergleich von Richtungen (z.B. Geschwindigkeiten, Kräften) – was ist physikalische Änderung, was ist koordinatenbedingte Änderung?

Benötigt wird eine Transportvorschrift, genannt **Paralleltransport**, die einen Vergleich erlaubt.

Ein Vektor am Ort P und ein Vektor am Ort Q sind gleich, wenn sie, *mithilfe der Verbindung zum selben Ort transportiert*, gleich sind.



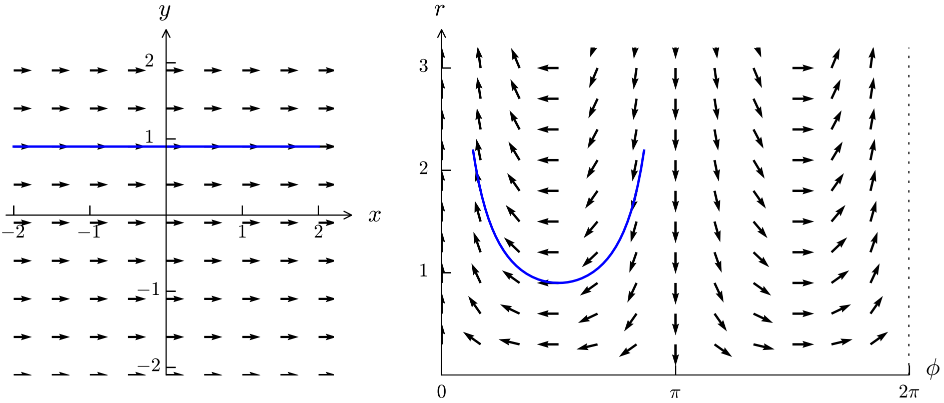
Gerade

Alternative Definition einer Geodäten (=Verallgemeinerung einer Geraden): Kurve, deren Richtungsvektor an jedem Punkt sich durch Paralleltransport entlang der Kurve ergibt. „Geradestmögliche Kurve“!

Paralleltransport im Kleinen: Beim Paralleltransport bleibt der Winkel zwischen der Kurve, entlang derer transportiert wird, und dem Vektor, der transportiert wird, konstant!

Beispiel Polarkoordinaten

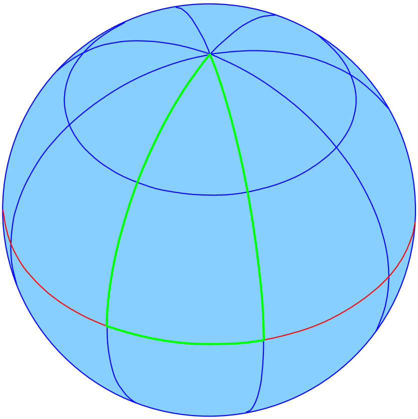
Beispiel: Geraden in der Ebene in kartesischen bzw. Polarkoordinaten:



Gekrümmte Flächen?

Bislang hat sich bei uns alles auf der Ebene abgespielt.
Was ist mit gekrümmten Flächen?

Einfaches Beispiel: Kugelgeometrie



Koordinaten auf gekrümmten Flächen

Zumindest auf Teilen der gekrümmten Fläche: Situation dieselbe wie bei krummen Koordinaten auf der Ebene! Überziehe mit Koordinatenlinien, gib die Metrik an!

Entscheidender: Bei genügend großem Hereinzoomen ist ein kleiner Ausschnitt einer gekrümmte Fläche kaum von einem kleinen Ebenenausschnitt zu unterscheiden!

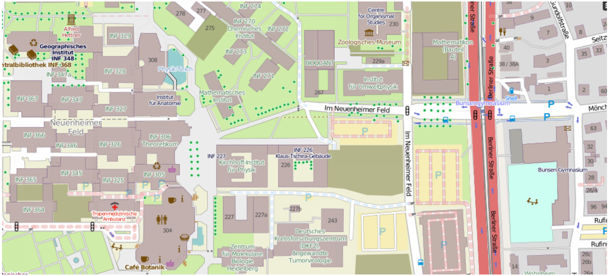
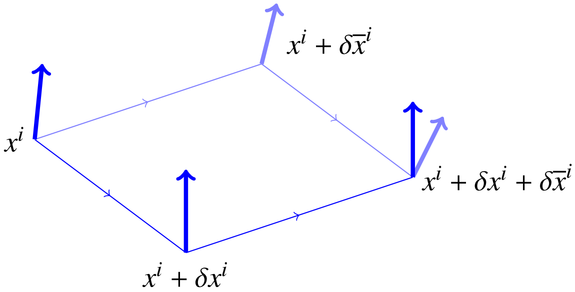


Bild © OpenStreetMap-Mitwirkende; vgl. diesen Copyright-Hinweis

Was unterscheidet ebene und gekrümmte Flächen?

Wie unterscheidet man krumme Koordinaten auf ebener Fläche von Koordinaten auf gekrümmter Fläche? (Auch eine Art der „Essenz“!)

Antwort: Paralleltransport auf geschlossenen Kurven

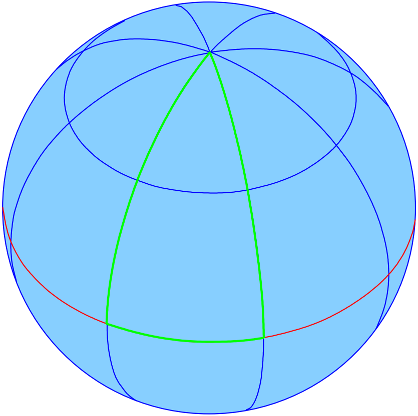


Was unterscheidet ebene und gekrümmte Flächen?

Gleichwertige Frage: Bleiben geradestmögliche Kurven, die ursprünglich parallel sind, immer parallel? (Vgl. das euklidische Parallelenaxiom.)

Um zu sehen, wieso diese Frage gleichwertig ist: Male Parallelogramm (Ausschnitte aus zwei Geodäten und ihrer Verbindungen), Vergleiche Richtungsvektoren

Einfaches Beispiel: Kugelgeometrie



Richtungsänderung bei Rundtransport ist ein Maß für die *Krümmung*.

Was passiert in drei oder mehr Dimensionen?

Mehrere Arten von Krümmung möglich — für jede Schnittebene analog zur normalen zweidimensionalen Ebene!

Mathematischer Formalismus

Metrik g_{ij}, abhängig von Koordinaten x^k

Paralleltransport über Christoffel-Symbole (erste Ableitung der Metrik):

$$\Gamma^l_{jk} = \frac{1}{2} g^{lm} (\partial_j g_{mk} + \partial_k g_{mj} - \partial_m g_{jk})$$

Krümmung über Riemann-Tensor

$$R^i{}_{jkl}(x) = \partial_k \Gamma^i_{jl} - \partial_l \Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{mk} \Gamma^m_{jl} - \Gamma^i_{ml} \Gamma^m_{jk}$$

„Zusammenziehender Anteil“ über Ricci-Tensor

$$R_{jl} \equiv R^i{}_{jil}$$

…so kann man alles, was wir hier bildlich besprochen haben, auch ausrechnen.

Rückblick

Wir haben gesehen: Bei allgemeinen, gekrümmten Flächen kann man **Abstände (entlang von Kurven)** messen, **Geodäten** (=geradeste, kürzeste Kurven) bestimmen und **Krümmungseigenschaften** bestimmen. Das ist die **Essenz** einer Fläche.

Allerdings: Für die **Koordinaten** (**Universalitätsanspruch**) gibt es keine absolut bevorzugte Wahl. (Nur auf einem infinitesimalen Ausschnitt kann man immer abstandstreue, kartesische Koordinaten wählen.)

Koordinatenwerte, Komponenten der Metrik (welche Funktion steht vor welcher Koordinatendifferenz), Komponenten des Krümmungstensors sind **relativ**, nämlich vom Koordinatensystem abhängig.

Vorausblick

Nächster Schritt (BMS am 29.10.): Vom Raum zur Raumzeit.

. . . und bitte http://www.haus-der-astronomie.de/bildungsplan2016 nicht vergessen!