

# **Strahlung und Wärme (und Sterne)**

**Weltmodelle und physikalische Werkzeuge  
Kosmologie für Nicht-Physiker**

**Markus Pössel & Björn Malte Schäfer**

Haus der Astronomie/Institut für Theoretische Astrophysik

16.10.2014 bis 22.1.2015

# Strahlung

Licht bzw. allgemeiner Strahlung: Hauptinformationsträger für astronomische Informationen!

Grundlegende Beobachtungen:

- Licht und Schatten
- Farben, Farbmischung
- Nachts ist es dunkel!
- Optik: Reflexionsgesetze, Lichtbrechung (z.B. in Wasser), Spiegel und Linsen

# Modelle für Licht

Einige frühe Modelle (Empedokles 5. Jh. v. Chr.): Sehen als etwas, das durch die Augen ausgesandt wird. (Euklid fragt 300 v. Chr.: Wie sehen wir Sterne?)

Alternativ und bis heute: Licht als etwas, dass die Augen (oder Sensoren) erreicht.

Aber was? Welle? Teilchen? Mischform?

# Teilchenmodelle für Licht

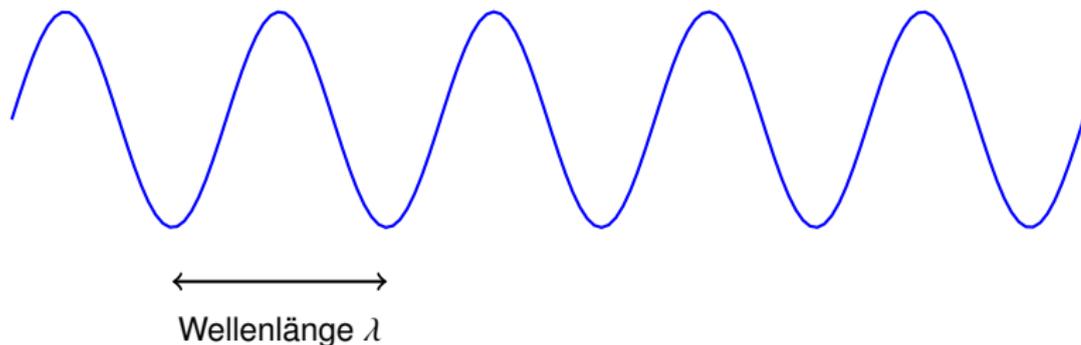
Lukrez 55 v. Chr., Pierre Gassendi und Newton 17. Jh.:  
Lichtteilchen, die von der Lichtquelle zum Auge fliegen

Teilchenstrom, jedes Teilchen fliegt mit großer Geschwindigkeit.

# Wellenmodelle für Licht

Robert Hooke, Christiaan Huygens (17. Jh.), Thomas Young (1800), Leonhard Euler und andere.

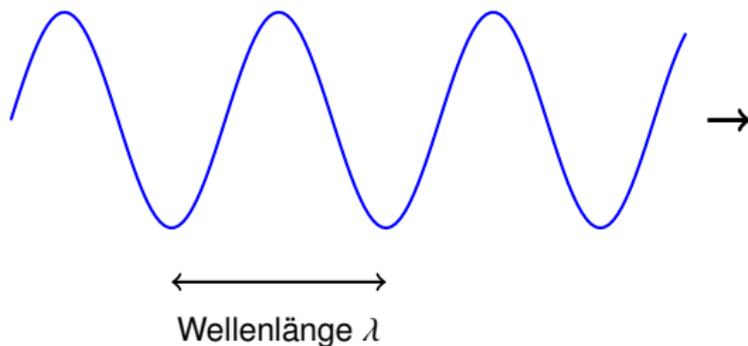
Licht als elementare Welle:



# Wellenmodelle für Licht

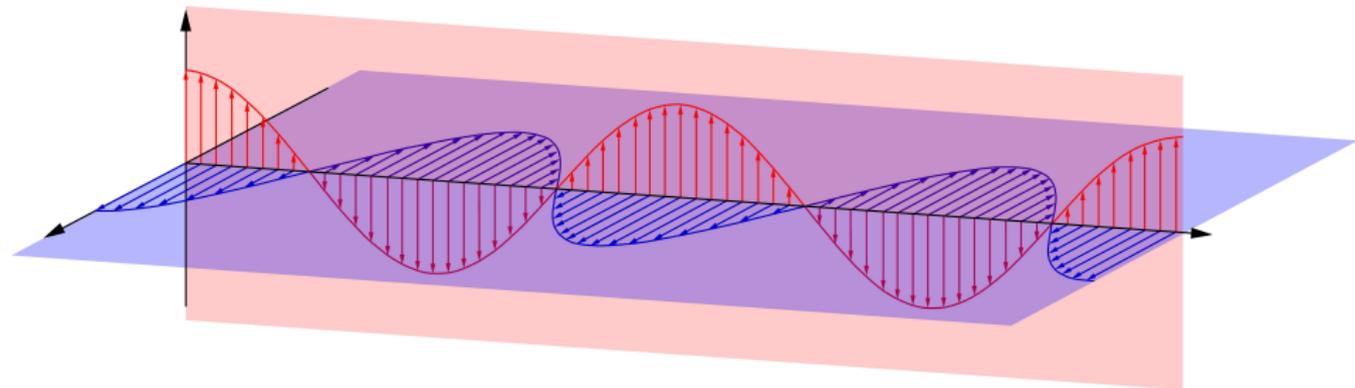
Zusammenhang zwischen Wellenlänge  $\lambda$ , Frequenz  $f$ ,  
Lichtgeschwindigkeit  $c$ :

$$\lambda \cdot f = c.$$



# Licht und Elektromagnetismus

James Clerk Maxwell (1864): Vereinheitlichte Beschreibung von elektrischen Feldern, magnetischen Feldern und Licht.



# Leuchtkraft und Entfernung

Im Teilchenmodell einfach zu verstehen: Lichtstromdichte  $F$  (Energie pro Zeiteinheit pro Detektorfläche) fällt mit der Entfernung  $r$  ab wie

$$\Phi(r) \sim 1/r^2.$$

Zusammenhang mit Leuchtkraft  $L$  (pro Zeit abgestrahlter Energie) eines isotrop strahlenden Objekts:

$$\Phi(r) = \frac{L}{4\pi r^2}.$$

# Größenklassen für die Leuchtkraft

Astronomische Größenklassen (Magnitudines; Hipparchos und Norman Pogson)  $m_1, m_2$  aus Lichtstromdichten  $F_1, F_2$ :

$$m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_1}{F_2}\right)$$

(eine Größenklasse Unterschied  $\equiv$  Lichtstromdichten um Faktor 2,512 unterschiedlich).

Ursprünglich: orientiert an der Empfindlichkeit des menschlichen Auges ( $m = 1 \dots 6$ )

Sonne:  $m = -26,74$  entspricht (bolometrisch = alle Wellenlängen)  $1376 \text{ W/m}^2$ .

# Abstände aus Helligkeiten

Objekt	$F$ in $W/m^2$	Abstand in Lj, falls $L_{\odot}$
Sirius	$10^{-7}$	1,8
Canopus	$5 \cdot 10^{-8}$	2,5
$\alpha$ Cen	$3 \cdot 10^{-8}$	3,1
Arktur, Vega, Capella, Rigel	$3 \cdot 10^{-8}$	3,5

(Grundlage: Berechnung aufgrund von visuellen Magnituden und der [bolometrischen] Solarkonstante.)

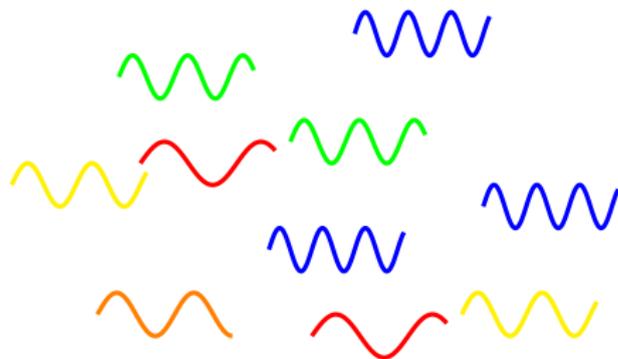
Dies gibt bereits recht gute „Hausnummern“ für Sternabstände!

# Vom Regenbogen zum Spektrum



# Vom Regenbogen zum Spektrum

Licht als Gemisch von „Elementarkomponenten“ mit unterschiedlicher Wellenlänge:



Spektrograf „entmischt“ die Komponenten (Dispersion)!

# Prisma oder Gitter: Farben entmischen

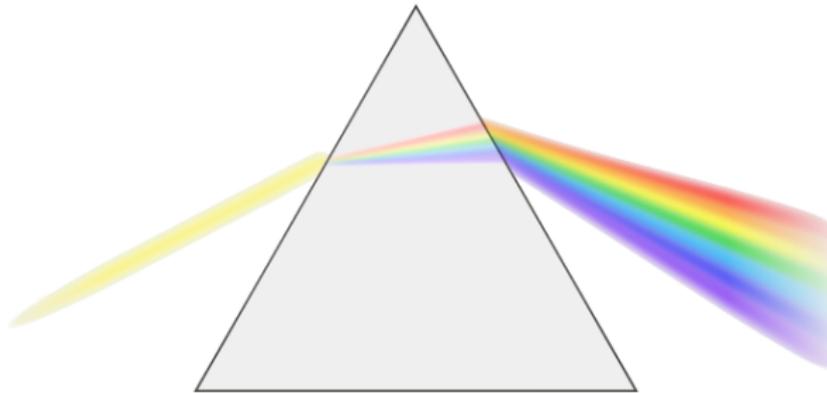
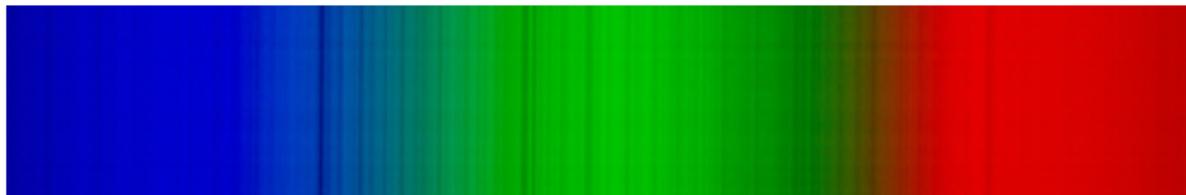
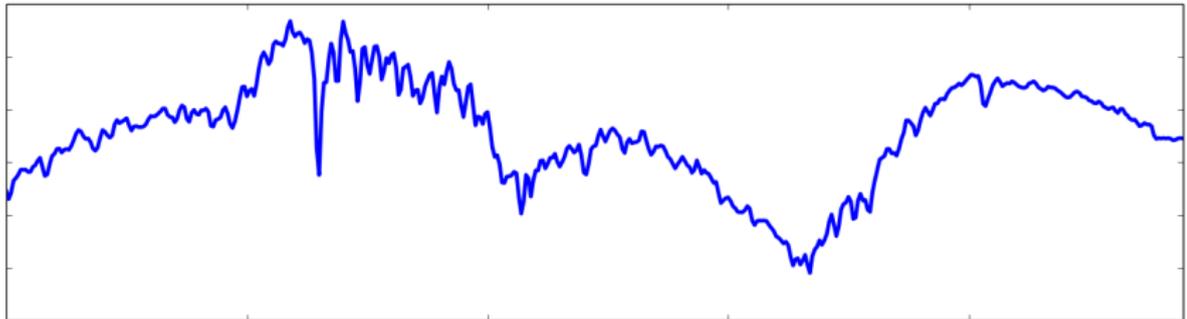


Abbildung: Benutzer Suidroot via Wikimedia Commons unter CC BY-SA 3.0

# Sonnenspektrum



# Sonnenspektrum, (semi-)quantitativ



# Von Fraunhofer zu Kirchhoff und Bunsen

Joseph von Fraunhofer: Entdeckung dunkler Linien im Sonnenspektrum

Gustav Kirchhoff (1824–1887) und Robert Bunsen (1811–1899): Zuordnung von Spektrallinien zu chemischen Elementen für Natrium, Lithium und Kalium – später neu entdeckt Cäsium und Rubidium!

# Beginn der Astrochemie

Vergleich chemische Dämpfe mit  
Sonnenlicht: Elemente in der Sonne  
identifiziert!

Später (1868) Jules Janssen und  
Norman Lockyer während  
Sonnenfinsternis: Noch nicht auf der  
Erde beobachtete Linien – neues  
Element Helium!



# Dopplereffekt

Christian Doppler 1842 in „Über das farbige Licht der Doppelsterne und einiger anderer Gestirne des Himmels“: Einfluss von Bewegung (direkt zum Beobachter hin/von ihm weg = Radialgeschwindigkeit) auf die Wellenlänge des beobachteten Lichts.

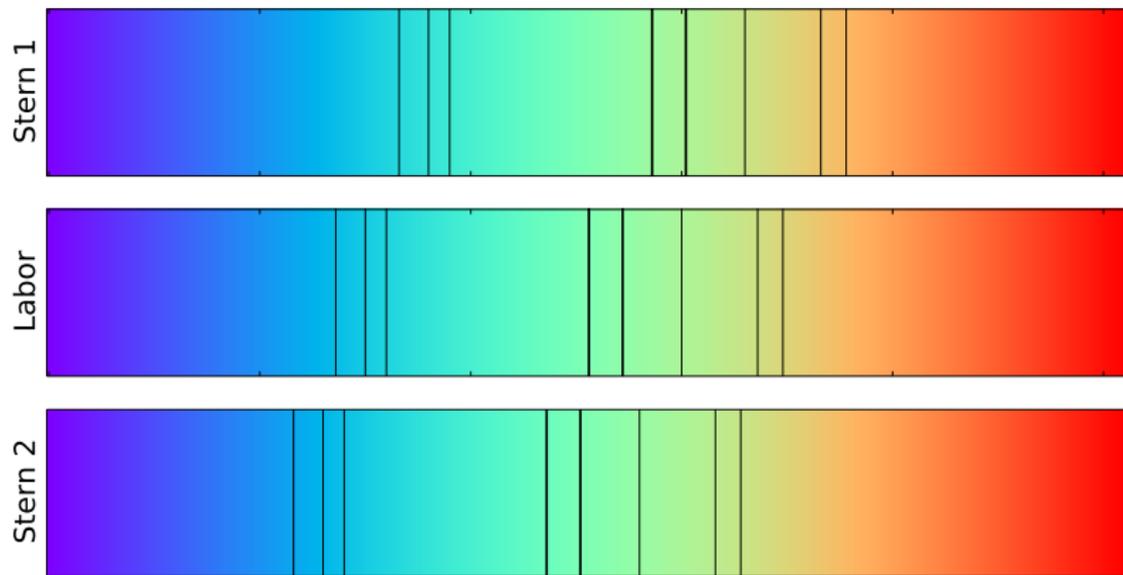
$$z \equiv \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}$$

hat in Abhängigkeit von der Radialgeschwindigkeit  $v$  (vom Beobachter weg gerichtet wenn  $v > 0$ ) und der Lichtgeschwindigkeit  $c$  den Wert

$$z = \frac{v}{c}.$$

# Dopplereffekt: Spektren

Spektrallinien helfen, Verschiebungen sichtbar zu machen:



# Dopplereffekt an Doppelsternen u.ä.

Spektroskopische Doppelsterne: Spektrum mit zwei Sätzen von Spektrallinien, die sich mit der Zeit gegeneinander verschieben.

Newton'sche Mechanik: Massenverhältnisse können bestimmt werden.

Wenn Neigung des Systems gegenüber Sichtlinie bekannt: Gesamtmasse (und damit auch die Einzelmassen) bestimmbar!

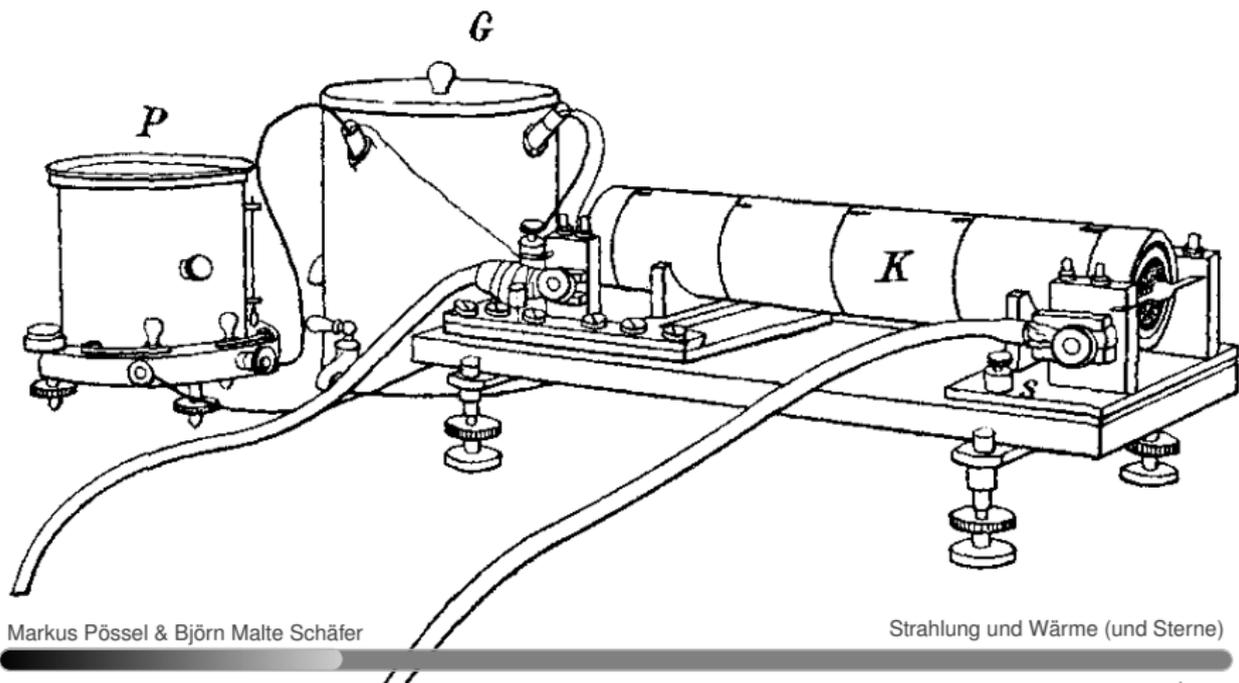
Moderne Anwendung: Radialgeschwindigkeitsmethode für Exoplaneten.

# Wärmestrahlung

Schwarzer Körper (Kirchhoff 1860): Absorbiert alle Strahlung, die auf ihn fällt. Charakteristisches, nur von Temperatur abhängiges Spektrum.

# Schwarzkörper-Spektrum: Messungen

Otto Lummer und Friedrich Kurlbaum 1895+,  
Physikalisch-Technische Reichsanstalt:



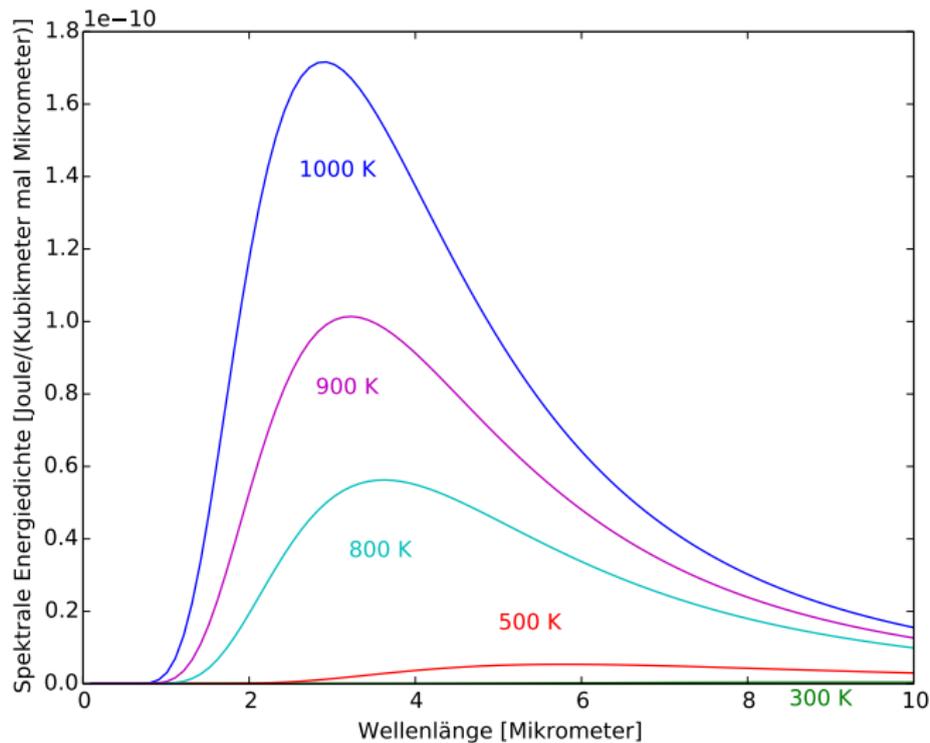
# Planck-Spektrum

Max Planck 1900: Korrekte Spektrumskurve für Schwarzkörperstrahlung (Verallgemeinerung voriger Ergebnisse von Rayleigh-Jeans und Wien):

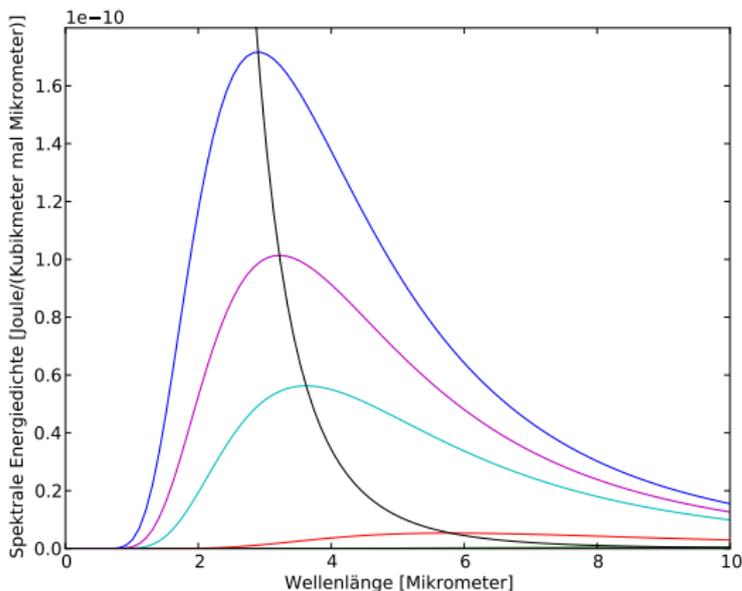
Energiedichte im Wellenlängenbereich  $\lambda$  und  $\lambda + d\lambda$  ist bei Temperatur  $T$

$$B(\lambda, T) = 8\pi hc \frac{\lambda^{-5}}{\exp(hc/\lambda kT) - 1}.$$

# Planck-Spektrum

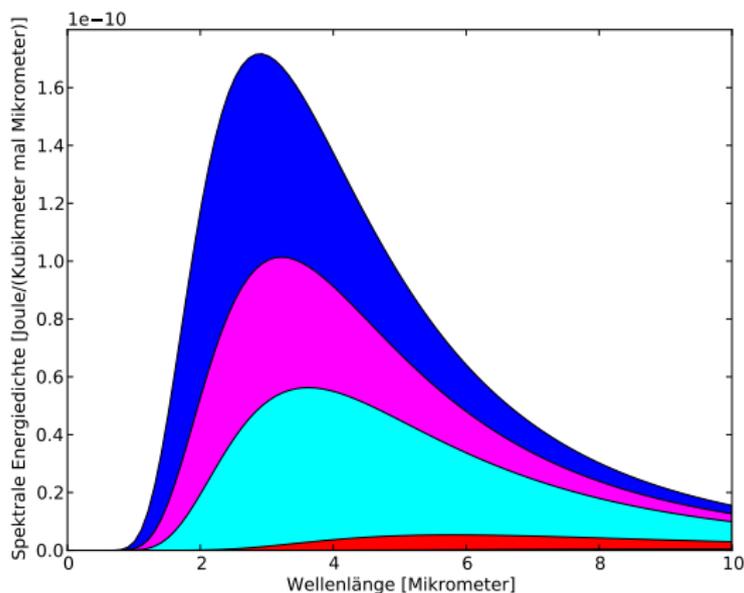


# Planck-Spektrum



Maximum der Energieverteilung :  $\lambda_{max} = 2897,8 \mu\text{m} \cdot \frac{1 \text{ K}}{T}$

# Planck-Spektrum



Gesamt – Energiedichte (Stefan – Boltzmann – Gesetz) :  $e = \frac{4\sigma}{c} T^4$ .

# Stefan-Boltzmann-Gesetz

Für die Energiedichte:

$$e = \frac{4\sigma}{c} T^4$$

mit der Stefan-Boltzmann-Konstante

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}.$$

Strahlungsleistung der Oberfläche  $A$  eines Schwarzen Körpers:

$$J = \sigma \cdot T^4.$$

# Stefan-Boltzmann-Gesetz: Beispiel Sonne

Abstand der Sonne: 150 Mio. km

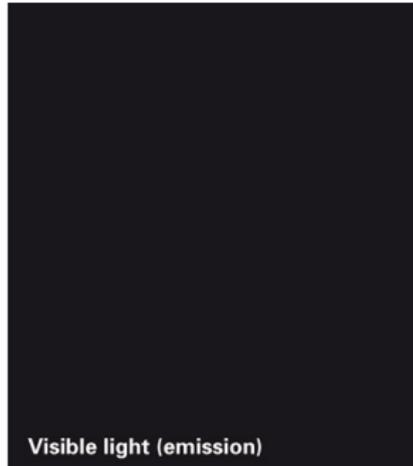
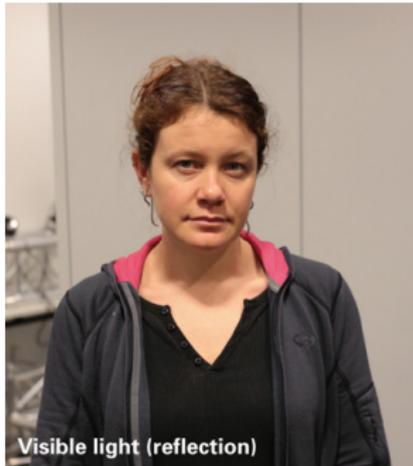
Winkeldurchmesser  $30'$ , also Radius rund 700.00 km

Solarkonstante:  $1376 \text{ W/m}^2$

Sonnenleuchtkraft (über  $F = L/4\pi d^2$ ):  $3,8 \cdot 10^{26} \text{ W}$ .

Temperatur über Stefan-Boltzmann-Gesetz:  $T = 5744 \text{ K}$   
(Effektivtemperatur)

# Wärmestrahlung: Menschen-Temperaturen



Ende Vorlesung 6.11.2014

# Wärmestrahlung: Glühendes Metall

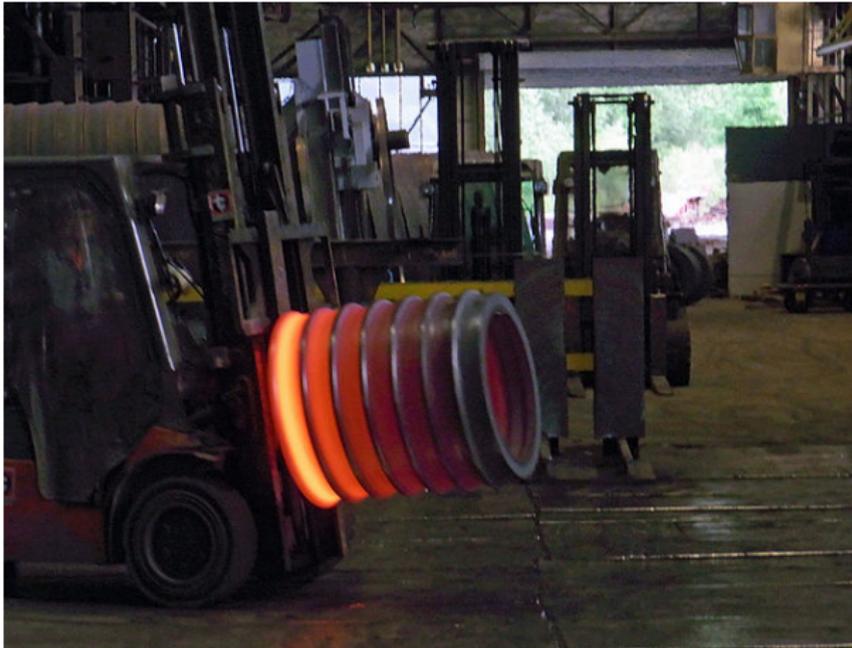


Bild: Rainer Halama via Wikimedia Commons unter CC BY-SA 3.0

# Wärmestrahlung: Scheinwerfer



Benutzer Anton (2006) via Wikimedia Commons unter Lizenz CC BY-SA 2.5

# Planck-Gesetz

Grundannahme von Plancks Ableitung seines Strahlungsgesetzes:

Die Wand des Schwarzen Körpers kann Strahlungsenergie nur in ganz bestimmten „Paketen“ aufnehmen; Strahlungsanteil mit Frequenz  $\nu$  nur als ganzzahlige Vielfache von

$$E = h\nu$$

mit  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$  dem Planck'schen Wirkungsquantum.

# Quantenmechanik

Auf Plancks Grundannahme aufbauend: Quantenphysik  
(Entwicklung 1900-1935).

Bohr'sches Atommodell 1913: Erklärung für Spektrallinien

Photonenkonzept: Licht gibt es nur in Paketen mit  $E = h\nu$

Darauf aufbauende neue Art der Mechanik (Quantenmechanik):  
Bohr, Heisenberg, Schrödinger, Born, Jordan.

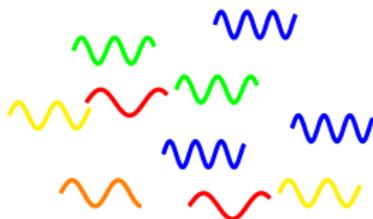
Quantenmechanik plus Spezielle Relativitätstheorie:  
Quantenfeldtheorien. Dirac, Fock, Pauli, Yang/Mills, Feynman,  
... — Grundlage der modernen Elementarteilchenphysik

# Welle-Teilchen-Dualität

Licht besteht aus Teilchen (Photonen). Jedes Photon hat eine Energie  $E$  und zugehörige Frequenz  $\nu$  mit  $E = h\nu$ .

Wo sich wann wieviele Photonen aufhalten, wird durch eine wellenartige Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmt (Wellenfunktion). Daher können große Mengen an Photonen Welleneigenschaften zeigen (z.B. Interferenz).

Monochromatisches Licht besteht aus lauter Photonen mit derselben Energie  $E = h\nu$  (entspricht Elementarwelle mit Frequenz  $\nu$ ). Weißes Licht ist eine Mischung aus Photonen unterschiedlicher Energien.



# Bohr'sches Atommodell

Elektronen können rund um den Atomkern nur auf bestimmten Bahnen „umlaufen“, jede davon mit genau definierter Elektronenenergie. Bei Übergängen von einer Bahn zur anderen werden Photonen ausgesandt:

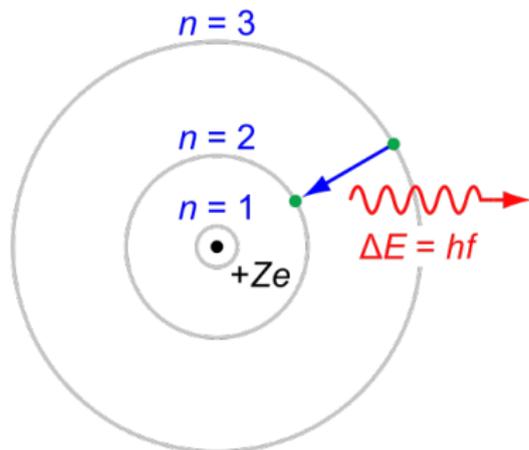


Bild: JabberWok at the English language Wikipedia via Wikimedia Commons unter Lizenz CC BY-SA 3.0

# Bohr'sches Atommodell

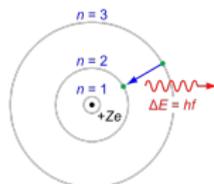


Bild: JabberWok at the English language Wikipedia via Wikimedia Commons unter Lizenz CC BY-SA 3.0

Energieniveaus: Übergangsenergie  $\Delta E$  hängt von Schalenzahlen  $n, m$  ab wie

$$h\nu = \Delta E \sim \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Spektralserien, z.B. Lyman-Serie, Balmer-Serie, Paschen-Serie...

# Spektralserien

Spektralserien für jeweils festes  $m$ :

$$h\nu = \Delta E \sim \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Wasserstoffatom,  $m = 1$ : Lyman-Serie

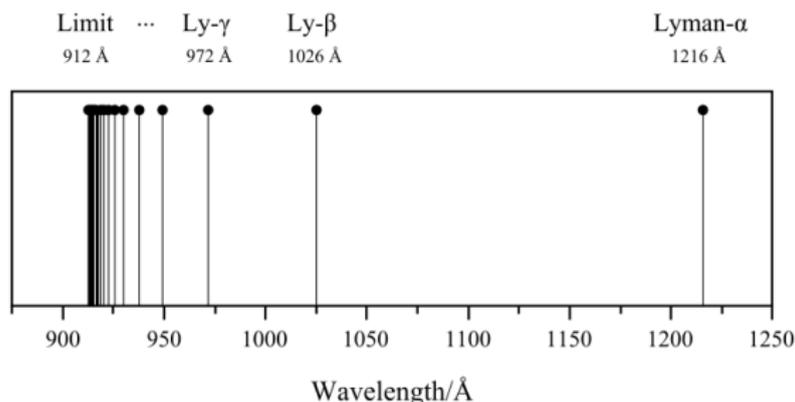
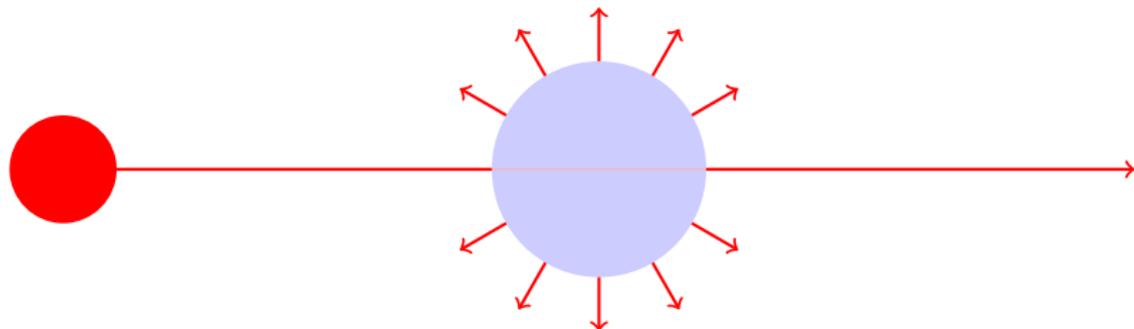


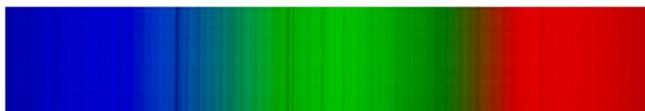
Bild: Benutzer Adriferr und OrangeDog via Wikimedia Commons unter Lizenz CC BY-SA 3.0

# Absorptionslinien

Heiße Strahlungsquelle im Hintergrund, kühleres Gas im Vordergrund:

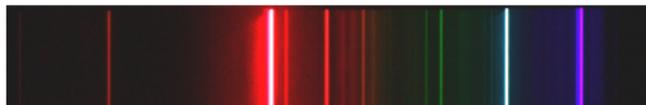
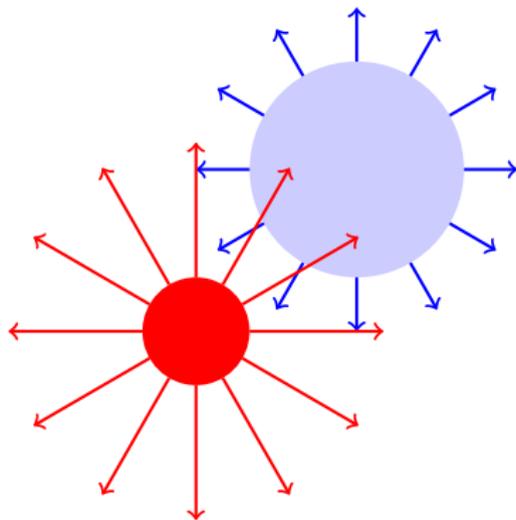


Streuung  $\Rightarrow$  nur abgeschwächtes Licht kommt bei den entsprechenden Frequenzen an:



# Emissionslinien

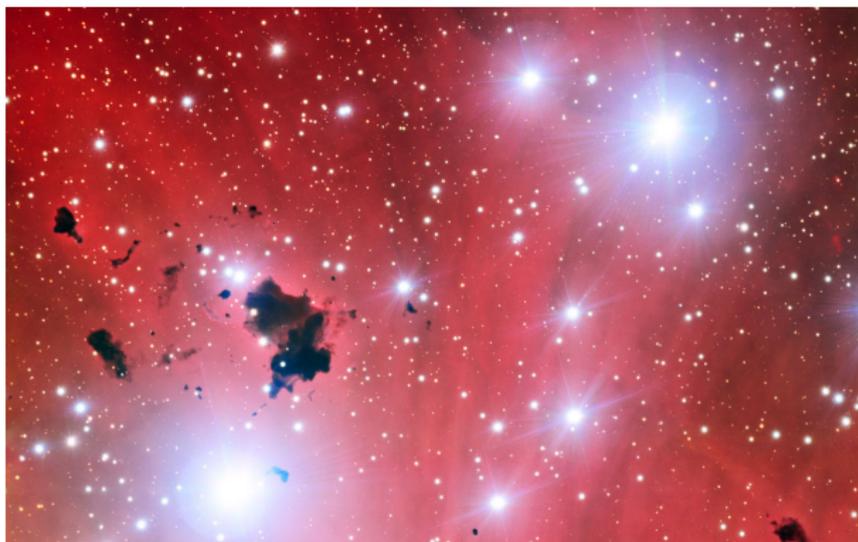
Anregung zum Strahlen durch energiereiche Photonen einer anderen Quelle (z.B. heißer Stern):



# Spektralserien

Übergänge zu  $m = 2$ : Balmer-Serie ( $H\alpha$ ,  $H\beta$ ,  $H\gamma$ , ...)

$$h\nu = \Delta E \sim \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$



Sternentstehungsgebiet IC2944, Bild: ESO



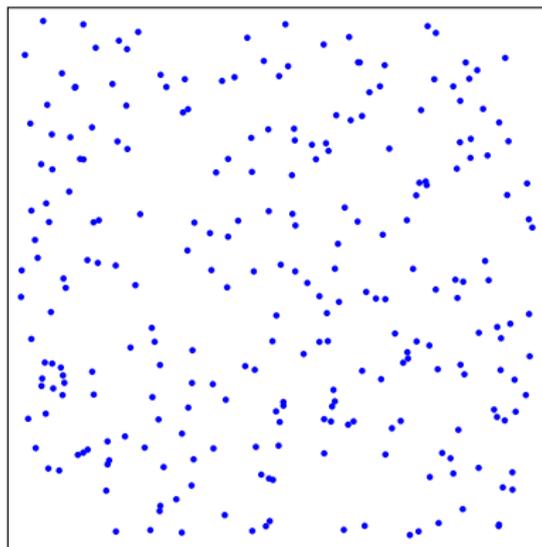
# Thermodynamik

Historische Trennung:

Thermodynamik: Naturgesetze für Größen wie Wärme, Temperatur, Entropie (Carnot, Kelvin, Joule, ...) – wichtige Triebkraft: Verständnis der Dampfmaschine u.ä.

Statistische Physik: „Mikrophysik“ der Thermodynamik: Wie ergeben sich die thermodynamischen Eigenschaften statistisch aus den Eigenschaften der mikroskopischen Systembestandteile? (Boltzmann, Maxwell, Gibbs, ...)

# Ideales Gas



$N$  Teilchen, die im Volumen  $V$  wild durcheinanderfliegen, miteinander kollidieren (und dabei Bewegungsenergie/Impuls austauschen, elastischer Stoß). (Innere) Gesamtenergie  $E$ .

# Ideale Gase in der Urknallphase

Eine ganze Reihe von Materieformen in der heißen Frühphase (Urknallphase) lassen sich näherungsweise als ideale Gase behandeln:

- Plasma aus Elektronen und Atomkernen
- Atomkerne und ihre Reaktionen
- Plasma aus Elektronen, Atomkernen, Neutrinos, Teilchenpaaren

Plasma: So viele freie Ladungen, dass lange Reichweite der elektromagnetischen Kräfte effektiv abgeschirmt wird.

# Ideales Gas: Temperatur

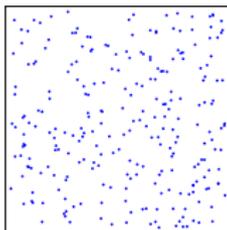
Bewegungsenergie der Teilchen, die sich da bewegen, hat einen Mittelwert. Statistische Definition von *Temperatur*!

$$kT \propto \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m v_i^2,$$

mit  $k$  einem Einheiten-Umrechnungsfaktor (Joule in Kelvin):  
Boltzmannkonstante  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ .

Kelvin: Absolute Temperaturskala, Differenzen dieselben wie bei Celsius-Skala.  $T = 0 \text{ K}$ : Teilchen bewegen sich überhaupt nicht!

# Ideales Gas: Druck



Teilchenstoß gegen die Wand der Box überträgt Impuls („Wucht“) – entspricht einer Kraft-pro-Flächeneinheit, damit einem Druck.

Einfaches Argument: Kraftübertrag pro Teilchen ist  $\sim mv$ , Stoßzahl pro Teilchen ist  $\sim v/(2L)$ , aufsummiert auf alle Teilchen gibt Faktor  $N$ , Druck als Kraftübertrag pro Flächeneinheit ist

$$P \sim N \cdot \frac{1}{2}mv^2 \cdot \frac{1}{L^3} \sim \frac{NkT}{V}.$$

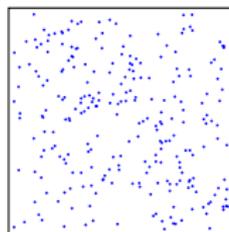
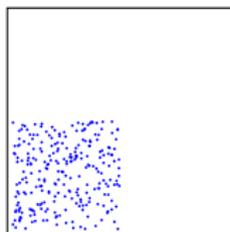
Ergebnis (hier mit korrektem Vorfaktor): *Ideale Gasgleichung* (sog. Zustandsgleichung):

$$PV = NkT.$$

# Entropie

Mikrozustände vs. Makrozustände: Es gibt viele Mikrozustände, die mit ein und demselben Makrozustand (z.B. durch Energie, Teilchenzahl, Volumen festgelegt) vereinbar sind!

Unordnung und Wahrscheinlichkeit hängen zusammen – z.B. Würfelwurf, Münzwurf, aber auch Gaszustände:



# Entropie

*Entropie*: Maß für die Anzahl der Mikrozustände  $\Omega(E, V, N)$ , die mit einem gegebenen Makrozustand mit Energie  $E$ , Volumen  $V$ , Teilchenzahl  $N$  vereinbar ist:

$$S(E, V, N) = k \cdot \log \Omega(E, V, N).$$

Warum der Logarithmus? Für getrennte Systeme  $\Omega(E, V, N) = \Omega(E_1, V_1, N_1) \cdot \Omega(E_2, V_2, N_2)$ , so dass  $S = S_1 + S_2$  sich aufsummiert.

# Zeit-Asymmetrie

Grundgesetze der Mechanik sind zeitsymmetrisch – statistische Entwicklung von Makrozuständen nicht: Entwicklung hin zum wahrscheinlichsten Zustand  $\Rightarrow$  Zustand der größten Entropie!

Entropie nimmt mit der Zeit niemals ab!

Beispiel: Würfelspiel, bei dem anfangs alle Würfel 1 zeigen; dann wird in jeder Runde mit einer kleinen Zahl von Würfeln neu gewürfelt.

# Entropie und Wärme

Wärme ist eine Energieform, aber nur begrenzt eine, mit der man Arbeit verrichten kann! Wärmekraftmaschinen können nur einen Teil der darin enthaltenen Wärmeenergie in Arbeit umsetzen.

Grund ist genau die Unmöglichkeit, dass sich ein System mit der Zeit spontan ordnet (z.B. Gasteilchen in einer Kolbenkammer fliegen geordnet gegen den Kolben). Genauer Zusammenhang zwischen kleiner Menge an zugeführter Wärmeenergie  $\delta Q$  und Entropieänderung  $\Delta S$ :

$$\delta Q = T \Delta S$$

# Entropie und Energie

Bei diesem Zusammenhang: Nutze Energieerhaltung aus

$$\Delta E = \delta Q - P\Delta V.$$

Das ergibt

$$\Delta S = \frac{1}{T}\Delta E + \frac{P}{T}\Delta V.$$

Außerdem erhöht auch das Hinzufügen von neuen Teilchen (verschiedene Teilchenarten  $N_i$ ) die Entropie (nämlich die Zahl der möglichen Zustände;  $\mu$  heißt *chemisches Potential*):

$$\Delta S = \frac{1}{T}\Delta E + \frac{P}{T}\Delta V - \sum_i \frac{\mu_i}{T}\Delta N_i.$$

# Hauptsätze der Thermodynamik

Nulltes Gesetz: Begriff des thermischen Gleichgewichts (~ Systeme, die in Kontakt sind, nehmen ein und dieselbe Temperatur an)

Erster Hauptsatz: Wärmeenergie als eine Form der Energie,

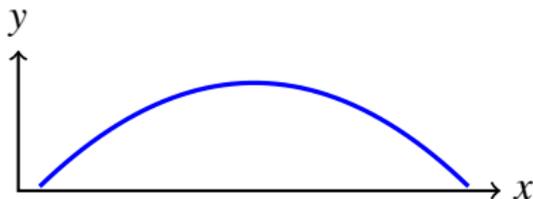
$$\Delta E = \delta Q - P\Delta V + \sum_i \mu_i \Delta N_i$$

Zweiter Hauptsatz: für zeitliche Veränderungen  $\Delta S \geq 0$

(Dritter Hauptsatz:  $T = 0$  kann nicht erreicht werden.)

# Entropie und gekoppelte Systeme

Maximum einer Funktion  $f(x)$  ist dort, wo kleine Verschiebung  $\Delta x$  keine Veränderung von  $f(x)$  bewirkt:



⇒ wende an auf zwei Systeme, die miteinander gekoppelt sind; betrachte getrennt Änderungen in Energie  $E$ , Volumen  $V$  und Teilchenzahl  $N$  – im Gleichgewicht sollte sich die Entropie nicht ändern!

# Entropie und gekoppelte Systeme

Austausch von Wärme:

Gesamtenergie ist konstant  $\Rightarrow$  Zuwachs  $\Delta E$  beim ersten System bewirkt Änderung  $-\Delta E$  beim zweiten System.

$$\Delta S = \frac{1}{T_1} \Delta E_1 + \frac{1}{T_2} \Delta E_2 = \left[ \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right] \Delta E.$$

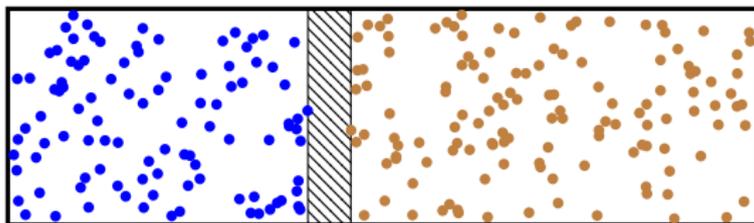
Maximum bedeutet, dass sich die Entropie bei kleinen Energieänderungen  $\Delta E$  nicht ändert:

$$\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 = T_2.$$

Systeme, die Wärme austauschen können, haben im Gleichgewichtszustand dieselbe Temperatur!

# Entropie und gekoppelte Systeme

Austausch von Volumen ( $T$  gleich):



Volumina gekoppelt: Kolben etwas nach rechts geschoben vergrößert das linke Volumen (System 1) um  $\Delta V$ , verändert das rechte (System 2) um  $-\Delta V$ .

$$\Delta S = \frac{p_1}{T} \Delta V_1 + \frac{p_2}{T} \Delta V_2 = \frac{1}{T} [p_1 - p_2] \Delta V$$

$\Rightarrow$  im Gleichgewicht,  $\Delta S \Rightarrow p_1 = p_2$

# Entropie und gekoppelte Systeme

Austausch von Teilchen (bei gleicher Temperatur  $T$ ): Wenn Gesamtzahl erhalten, dann Zuwachs an Teilchen  $\Delta N$  entspricht Änderung im zweiten System von  $-\Delta N$ :

$$\Delta S = -\frac{\mu_1}{T} \Delta N_1 - \frac{\mu_2}{T} \Delta N_2 = -\frac{1}{T} [\mu_1 - \mu_2] \Delta N$$

$\Rightarrow$  im Gleichgewicht,  $\Delta S \Rightarrow \mu_1 = \mu_2$

Chemisches Potential  $\mu$  ist ungewohnter als Druck oder Temperatur – aber auf die hier gezeigte Weise kann man eine Vorstellung davon bekommen, was diese Größe bedeutet.

# Entropie und gekoppelte Systeme

*Außerhalb* des Gleichgewichts:  $\Delta S \geq 0$ ! Aus den gleichen Überlegungen wie für die Gleichgewichtsbedingungen folgt:

$$\Delta S = \frac{1}{T_1} \Delta E_1 + \frac{1}{T_2} \Delta E_2 = \left[ \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right] \Delta E > 0$$

ist gegeben, wenn folgendes gilt:

$$T_1 > T_2 \Rightarrow \Delta E < 0$$

und

$$T_2 > T_1 \Rightarrow \Delta E > 0.$$

$\Delta E$  war definiert als die Veränderung der Energie von System 1: Energie fließt vom System mit höherer Temperatur zum System mit niedrigerer Temperatur!

# Entropie und gekoppelte Systeme

Analog für Volumenaustausch:

$$\Delta S = \frac{p_1}{T} \Delta V_1 + \frac{p_2}{T} \Delta V_2 = \frac{1}{T} [p_1 - p_2] \Delta V > 0$$

gilt wenn

$$p_1 > p_2 \Rightarrow \Delta V > 0$$

und

$$p_1 < p_2 \Rightarrow \Delta V < 0.$$

$\Delta V$  war die Veränderung für System 1: Volumen nimmt zu für das System mit höherem Druck!

# Entropie und gekoppelte Systeme

Teilchenaustausch:

$$\Delta S = -\frac{\mu_1}{T} \Delta N_1 - \frac{\mu_2}{T} \Delta N_2 = -\frac{1}{T} [\mu_1 - \mu_2] \Delta N > 0$$

gilt wenn

$$\mu_1 > \mu_2 \Rightarrow \Delta N < 0$$

und

$$\mu_2 > \mu_1 \Rightarrow \Delta N > 0$$

$\Delta N$  war Veränderung für System 1: Teilchenzahl nimmt für das System mit größerem chemischen Potential ab!

# Entropie und gekoppelte Systeme

Systeme mit mehreren Teilchensorten und einziger Teilchenreaktion



Dann hängen Veränderungen der Teilchenzahlen  $\Delta N_A$ ,  $\Delta N_B$ ,  $\Delta N_C$  und  $\Delta N_D$  zusammen:

$$\Delta N_A = \Delta N_B = -\Delta N_C = -\Delta N_D$$

und im Gleichgewicht

$$0 = \Delta S = -\frac{1}{T} [\mu_A + \mu_B - \mu_C - \mu_D] \Delta N_A$$

so dass

$$\mu_A + \mu_B = \mu_C + \mu_D.$$

# Gleichgewichtsverteilungen

Aus der Verbindung von Quantentheorie und Statistik folgt, wieviele Teilchen mit welcher Energie man unter gegebenen Umständen erwarten kann.

Für kosmologische Situationen (Plasma/Elementarteilchensuppe in der Urknallphase) zwei Fälle wichtig:

- Nichtrelativistische Teilchen ( $v \ll c$ ,  $mc^2 \gg kT$ )
- Hochrelativistische Teilchen ( $v \sim c$ ), z.B. Photonen

Ende Vorlesung 13.11.2014

# Nichtrelativistische Teilchen

Boltzmann-Statistik: Teilchenzahldichte für Teilchensorte  $i$  ist

$$n_i = \frac{g_i}{h^3} (2\pi m_i kT)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_i c^2 - \mu_i}{kT}\right)$$

mit  $m_i$  der Teilchenmasse,  $\mu_i$  dem zugehörigen chemischen Potential,  $T$  der Temperatur,  $g_i$  einem statistischen Faktor (weitere Freiheitsgrade),  $h$  Planck'sches Wirkungsquantum,  $k$  Boltzmannkonstante,  $T$  Temperatur.

# Nichtrelativistische Teilchen

Im thermodynamischen Gleichgewicht z.B. Zwei-Teilchen-Reaktion  
 $1 \leftrightarrow 2$ :

$$\mu_1 = \mu_2$$

so dass

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1}{g_2} \left( \frac{m_1}{m_2} \right)^{3/2} \exp(-Q/kT)$$

wobei  $Q = (m_1 - m_2)c^2$ . Der Faktor  $\exp(-Q/kT)$  heißt  
*Boltzmannfaktor*.

Reaktionen laufen bevorzugt in Richtung des energetisch  
niedrigeren Zustands ab!

# Hochrelativistische Teilchen 1/2

$$kT > mc^2, kT > \mu, E \approx pc:$$

Teilchenzahlen gehen wie

$$n = \frac{8\pi}{(ch)^3} \zeta(3) g(kT)^3 \cdot \begin{cases} 1 & \text{Bosonen} \\ 3/4 & \text{Fermionen} \end{cases}$$

(Bosonen = Photonen etc., Fermionen = Kraftteilchen, z.B. Elektronen) mit  $\zeta(3) = 1.2020569031$ . Energiedichte ist

$$\rho c^2 = \frac{4\pi^5}{15(ch)^3} g(kT)^4 \cdot \begin{cases} 1 & \text{Bosonen} \\ 7/8 & \text{Fermionen} \end{cases}$$

## Hochrelativistische Teilchen 2/2

Druck:

$$p = \frac{1}{3}\rho c^2.$$

... nirgends kommt das chemische Potential  $\mu$  vor!

Heuristische Erklärung: Bei hohen Energien kommt es bei Teilchen zur „Paarbildung“ (Teilchen plus Antiteilchen); die Teilchenzahl wird dabei auch im Gleichgewichtszustand laufend verändert ohne große Entropieänderung.

# Hochrelativistische Teilchen: Energieverteilung

$$e = \frac{8\pi}{(hc)^3} \int_0^{\infty} \frac{E^3}{\exp(E/kT) - 1} dE$$

Setzt man  $E = h\nu$  und  $\lambda = c/\nu$  ein  $\Rightarrow$  exakt die Planck-Strahlungsformel aus der letzten Vorlesung!

Planck-Formel beschreibt „Photonengas“ gegebener Temperatur!

# Wärmestrahlung

Typisch für Systeme im Gleichgewicht: Energie gleichmäßig verteilt auf alle Freiheitsgrade (z.B. Teilchen, Arten der Bewegung für ein Teilchen); Energie pro Freiheitsgrad  $\sim kT$ .

Aber: Es gibt elektromagnetische Felder! Sind die im thermischen Gleichgewicht mit dem Rest, dann gibt es Photonen mit der Planck-Verteilung – Wärmestrahlung z.B. eines Körpers, mit Eigenschaften, die nur von der Temperatur abhängen!

# Teilchenreaktionen jenseits des Gleichgewichts

Allgemeineres Bild (auch jenseits des Gleichgewichts gültig):  
Teilchenreaktionen.

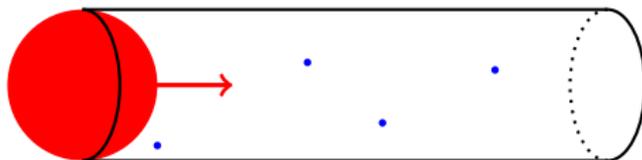
Teilchen reagieren miteinander, wenn sie einander hinreichend nahe kommen – einfachstes Beispiel: Teilchen als harte Kugeln: Sorte 1 mit Radius  $r_1$ , Sorte 2 mit Radius  $r_2 \Rightarrow$  Kollision immer dann, wenn Abstand zweier Kugelmittelpunkte kleiner als  $r_c = r_1 + r_2$ .

Frage: Wieviele Kollisionen (=Reaktionen) pro Zeiteinheit?

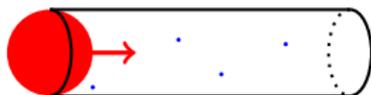
# Teilchenreaktionen

Vereinfachte Situation: Alle Teilchen der Sorte 1 in Ruhe, alle Teilchen der Sorte 2 haben die Geschwindigkeit  $v$ . Male Teilchen der Sorte 2 als Kugel mit Radius  $r_c$  mit Querschnittsfläche  $\sigma_{12} = \pi r_c^2$ , Teilchen der Sorte 1 als Punkte:

In Zeit  $\Delta t$  überstreicht jedes Teilchen der Sorte 2 das Volumen  $\pi r_c^2 \cdot v \Delta t$ :



# Teilchenreaktionen



D.h. pro Teilchen im Zeitintervall  $\Delta t$  Anzahl von Kollisionen:

$$\sigma_{12} v \Delta t \cdot n_2$$

Mit  $n_2$  Teilchenzahldichte von Sorte 2. Anzahl Kollisionen im Volumen  $V$  in Zeitintervall  $\Delta t$ :

$$V \rho_1 \cdot \sigma_{12} v \Delta t n_2$$

Anzahl Kollisionen pro Volumen, pro Zeitintervall:

$$n_1 n_2 \sigma_{12} v$$

mit  $n_1$  Teilchenzahldichte Sorte 1.

# Teilchenreaktionen

Allgemeinerer Fall: Wechselwirkung von Teilchen über Kräfte, nicht Stoß fester Kugel. Aber: ebenfalls ausdrückbar über charakteristische Fläche  $\sigma$  genannt *Wirkungsquerschnitt*!

Üblicherweise: Wirkungsquerschnitt energieabhängig (z.B. weil bei Kernreaktionen eine Potenzialbarriere überwunden werden muss),  $\sigma(E)$ .

Teilchenbeschleuniger:  $v = const..$  In Gas/Plasma: Mittelwert über alle möglichen Geschwindigkeiten (und damit auch Kollisionsenergien):

$$n_1 n_2 \langle \sigma(E) v \rangle.$$

# Teilchenreaktionen und thermisches Gleichgewicht

Veränderungen einer Situation mit Zeitskala  $\tau$ : Thermisches Gleichgewicht stellt sich ein, wenn die betreffenden Teilchen oft genug miteinander reagieren.

Typische Abschätzung:

$$\Gamma = n \langle \sigma(E)v \rangle.$$

ist Kollisionsrate pro Teilchen  $\Rightarrow$  mittlere Zeit zwischen Kollisionen ist

$$t_{coll} = 1/\Gamma.$$

Wenn

$$t_{coll} \ll \tau,$$

lokales thermisches Gleichgewicht.

# Teilchenreaktionen

Teilchenreaktion  $1 + 2 \leftrightarrow 3 + 4$ :

$$\frac{dn_1}{dt} = n_3 n_4 \langle \sigma_{34}(E)v \rangle - n_1 n_2 \langle \sigma_{12}(E)v \rangle$$

*Boltzmann-(Transport-)Gleichung*

In komplizierteren Fällen: Reaktionsnetzwerke!