Sterne: Modelle und Veränderung

Markus Pössel

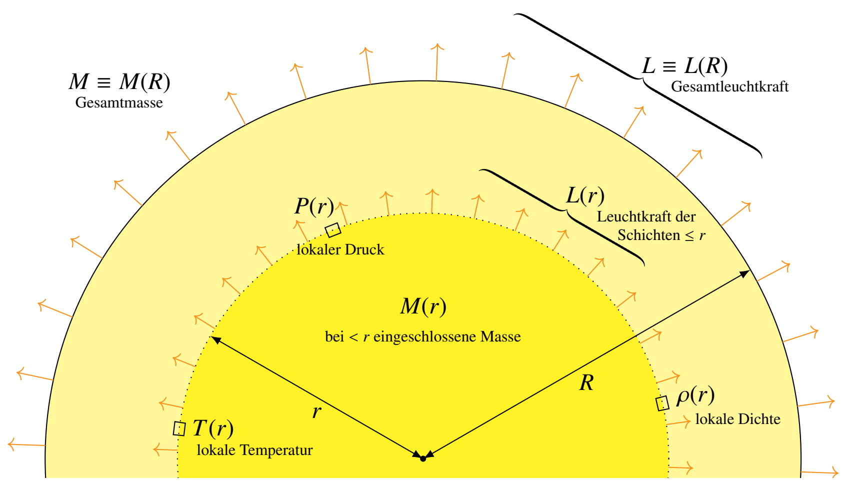
Handout zur Vorlesung „Kosmische Evolution für Nichtphysiker“ am 12.12.2017 und 19.12.2017

1 Sterne: das kugelsymmetrische Modell

In den einfachsten Modelle sind Sterne schlicht Gaskugeln, oder genauer: Plasmakugeln. Bevor man sich anschaut, wie sich diese Gaskugeln verändert, kann man sich zunächst einmal anschauen, was es an Gleichgewichtszuständen gibt

Uns interessieren die grundlegenden Eigenschaften eines solchen Objekts: welche Masse hat es, und wie verteilt sich diese Masse? Wie hoch ist der Druck in unterschiedlichen Abständen vom Zentrum? Wo wird wie viel Strahlung freigesetzt? Welche Temperatur haben die unterschiedlichen Regionen des Objekts?

Diese Eigenschaften drücken wir als physikalische Größen aus, und aufgrund der Annahme der Kugelsymmetrie hängen diese Größen in unserem Modell nur vom Abstand r vom Zentrum der Kugel ab. Hier sind einige der Größen dargestellt:



Eingezeichnet sind:

- die Dichte $\rho(r)$ (Masse pro Volumen)
- die eingeschlossene Masse $M(r)$, definiert als denjenigen Teil der Gesamtmasse des Objekts, der sich innerhalb der Kugelfläche mit Radius r befindet
- der Druck $P(r)$ als Funktion des Abstandes vom Zentrum

- die Helligkeit $L(r)$ als diejenige Energie, die von den Objektregionen innerhalb der Kugelschale mit Radius r insgesamt pro Zeiteinheit nach außen abgestrahlt wird

- die Temperatur $T(r)$ der unterschiedlichen Schichten – wenn sich eine solche denn sinnvoll definieren lässt

Über diese Funktionen definieren sich auch bestimmte zusammenfassende Parameter des Objekts. Fällt die Dichte $\rho(r)$ ab einem bestimmten Abstand R auf Null und bleibt auch bei größeren Abständen Null, dann ist R so etwas wie der Radius unseres Objekts, und $M \equiv M(R)$ die Gesamtmasse. Wird dementsprechend alle Helligkeit nur innerhalb des durch R definierten Gebiets erzeugt, dann ist $L \equiv L(R)$ die Gesamthelligkeit. Mittel wir $\rho(r)$ über alle Teilregionen, erhalten wir so etwas wie die mittlere Dichte $\overline{\rho}$ unseres Objekts.

Für eine genauere Modellierung können wir außerdem Größen definieren, welche die chemische Zusammensetzung des Objekts beschreiben. In der Astronomie ist Wasserstoff das häufigste Element, gefolgt von Helium. Alle weiteren Elemente rangieren in der Astronomie oft unter „ferner liefen“. Im Sprachgebrauch der Astronomen heiße all diese weiteren Elemente, also alles außer Wasserstoff und Helium, zusammengefasst *Metalle*. (Und ja, das ist komplett anders als im Sprachgebrauch der Chemiker.)

Für unsere Modelle von Sternen und ähnlichen Objekten wird wichtig sein: welche dieser Größen hängen über physikalische Gleichungen zusammen? Daraus ergibt sich auch: Welche Parameter etwa eines Sterns kann man vorgeben (beispielsweise die Gesamtmasse, und die chemische Zusammensetzung), und welche Eigenschaften sind nach diesen Vorgaben bereits eindeutig bestimmt, jedenfalls nicht mehr frei wählbar?

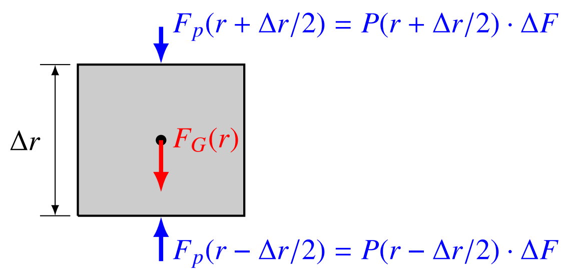
Schauen wir mal, ob bzw. wie wir einige dieser Gleichungen ableiten können.

2 Grundgleichungen des Sternaufbaus

2.1 Gravitation und Gegendruck

Für Sterne (und für andere Himmelskörper) ist charakteristisch: Die Gravitation ist bestrebt, all diese Körper nach Möglichkeit immer weiter zusammenzuziehen. All die unterschiedlichen materiegefüllten Regionen solch eines Himmelskörpers ziehen sich gegenseitig an.

Einen stabilen Himmelskörper können wir daher überhaupt nur bekommen, wenn es einen Gegendruck gibt, der dem Gravitationseinfluss die Waage hält. Die folgende Skizze zeigt im Querschnitt einen kleinen Ausschnitt eines kugelsymmetrischen Körpers: ein kleines Volumen, hier von der Seite gesehen; das Zentrum der Kugel soll in dieser Skizze direkt unterhalb des gezeigten Ausschnitts liegen. Wenn Sie vom Bild hin zum unteren Ende der Seite gehen, auf der Text und Bild stehen, und dann immer weiter in dieselbe Richtung, stoßen Sie irgendwann auf das Zentrum der Kugel:



Wie besagt, dies hier ist der Querschnitt – oberes und unteres Ende sollen jeweils eine Fläche ΔF besitzen, so dass die kleine Region insgesamt ein Volumen $\Delta V = \Delta r \cdot \Delta F$ besitzt.

Wie verhält es sich mit Druck und Masse, wenn sich das Gebilde, das wir betrachten, im Gleichgewicht befindet?

Dann müssen sich insbesondere die Kräfte, die auf unsere kleine Teilregion wirken, zu Null addieren. Unterhalb und oberhalb unseres Elements herrscht jeweils ein Druck $P(r)$, der vom Abstand r vom Zentrum abhängt. Ordnen wir dem Mittelpunkt unserer kleinen Region den Radiuswert r zu, dann herrscht direkt unterhalb unserer Region der Druck $P(r-\Delta r/2)$, der unsere Region nach oben drückt, und direkt oberhalb der Druck $P(r - \Delta r/2)$. Ein Druck P, der auf eine Fläche ΔF wirkt, erzeugt eine Kraft $P \cdot \Delta F$.

Insgesamt wirkt auf unsere Teilregion also alleine aufgrund des Drucks von oben und des Drucks von unten eine Netto-Kraft in Richtung des Kugelmittelpunkts, die den Betrag

$$F_P = P(r + \Delta r/2) \cdot \Delta F \quad - \quad P(r - \Delta r/2) \cdot \Delta F \tag{1}$$

hat. (Weil die Kraft aufgrund des Drucks auf die untere Fläche in die Gegenrichtung wirkt, nämlich vom Mittelpunkt weg, tritt sie hier hier mit einem Minuszeichen auf.)

Zusätzlich wirkt die Gravitationskraft auf unsere Region, und zwar in Richtung Zentrum. Hier kommen uns allgemeine Eigenschaften der Newtonschen Gravitationskraft zugute: Die Gravitationskraft einer homogenen Kugelschale (also einer Hohlkugel) auf einen im Inneren der Schale befindlichen Körper verschwindet. Die Gravitationskraft einer homogenen Kugelschale auf einen außerhalb der Schale befindlichen Körper hat genau dieselbe Richtung und Stärke, als wäre alle Masse der Kugelschale im Kugelmittelpunkt konzentriert.

Aber für die Gravitationskraft einer Punktmasse M im Abstand r auf eine zweite Punktmasse m liefert Newton uns eine einfache Formel; diese Kraft hat den Betrag

$$F_{grav} = \frac{GMm}{r^2}. \tag{2}$$

Auf unser kleines, oben skizziertes Volumenelement wirkt demnach nur die Gravitationskraft desjenigen Teils der Sternmasse, der sich in kleinerem Abstand als r vom Sternmittelpunkt befindet; diesen Teil der Masse hatten wir $M(r)$ genannt. Unsere kleine ausgewählte Region besitzt ihrerseits eine Masse $m = \rho(r)\Delta V = \rho(r)\,\Delta F\,\Delta r$, wobei $\rho(r)$ die Dichte der Materie im Abstand r vom Kugelmittelpunkt ist.

Insgesamt ergibt sich daraus gemäß der Newtonschen Formel für das Gravitationsgesetz die Kraft mit dem Betrag

$$F_g = G\frac{M(r)\rho(r)\Delta F\,\Delta r}{r^2}. \tag{3}$$

Auch diese Kraft wirkt zum Kugelmittelpunkt hin.

Insgesamt summieren sich Gravitationskraft und Druckkräfte zu

$$\frac{GM(r)}{r^2} \cdot \rho(r)\,\Delta r\,\Delta F \quad + \quad P(r+\Delta r/2)\cdot\Delta F \quad - \quad P(r-\Delta r/2)\cdot\Delta F \stackrel{!}{=} 0 \tag{4}$$

Diese Bedingung kann man wie folgt umschreiben. Die Kombination

$$\frac{P(r+\Delta r/2) - P(r-\Delta r/2)}{\Delta r}$$

entspricht im Grenzfall Δr gerade der Ableitung von $P(r)$ nach dem Radius r, also

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}.$$

Damit wird (4) zu

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}. \tag{5}$$

Das ist eine der Grundgleichungen für den Aufbau astronomischer Objekte.

2.2 Masse und Dichte

Die zweite Grundgleichung ist noch einfacher. Wie erwähnt war $M(r)$ die eingeschlossene Masse, definiert als denjenigen Teil der Gesamtmasse des Objekts, der sich innerhalb der Kugelfläche mit Radius r befindet. Das heißt aber auch:

$$\Delta M(r) \equiv M(r+\Delta r) - M(r),$$

also der Massenunterschied zwischen der beim Radiuswert r und der beim Radiuswert $r+\Delta r$ eingeschlossenen Masse, ist gerade die Masse in der Kugelschale, die von den Kugelflächen mit den Radien r und $r+\Delta r$ begrenzt wird. Diese Kugelschale hat näherungsweise die Masse[1]

$$\Delta M(r) = 4\pi r^2 \cdot \Delta r \cdot \rho(r),$$

also Kugelschalenfläche mal Kugelschalendicke mal Dichte. Wenn wir zu infinitesimalen Größen übergehen, wird diese Gleichung zu

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2 \cdot \rho(r). \tag{6}$$

Das ist die zweite unserer Grundgleichungen.

[1] Wem suspekt erscheint, dass wir hier bei einem gebogenen Gebilde Grundfläche mal Höhe gerade so multiplizieren wie bei gerader Grundfläche, kann alternativ rechnen: Kugelschalenvolumen ist Kugelvolumen mit Radius $r+\Delta r$ minus Kugelvolumen mit Radius r, nämlich

$$\frac{4}{3}\pi\left[(r+\Delta r)^3 - r^3\right].$$

Beim ausmultiplizieren ist der lineare Term in Δr gerade $4\pi r^2 \cdot \Delta r$; die Terme proportional zu Δr^2 und Δr^3 werden diesem Term gegenüber immer kleiner und unwichtiger, je kleiner wir Δr wählen.

2.3 Temperatur, Druck, Volumen

Den Zusammenhang zwischen Druck P, Teilchenzahl N, Volumen V und Temperatur T liefert uns die ideale Gasgleichung

$$PV = NkT, \tag{7}$$

mit $k = 1.38064852 \cdot 10^{-23}$ J/K der Boltzmann-Konstante. In der statistischen Physik kann man diese Gleichung für ein einfaches Gas (z.B. keine nennenswerte Energie in der Rotation oder Vibration der Moleküle gespeichert) direkt ableiten. Die ideale Gasgleichung ist eine sogenannte Zustandsgleichung, die Eigenschaften des Stoffes beschreibt, aus dem unser Objekt besteht.

Auch ohne Herleitung kann man einige plausible Eigenschaften von Gasen direkt aus der Gleichung ablesen. Hält man beispielsweise das Volumen eines Gases konstant und erhöht die Temperatur, dann erhöht sich auch der Druck (man denke an die Verhältnisse in einem Dampfdrucktopf).

Wir haben die Teilchenzahl N bislang nicht als Parameter verwendet, aber das macht nichts, denn wir können die ideale Gasgleichung wie folgt umschreiben. Betrachten wir ein kleines Volumen V innerhalb unseres Objekts. Wie in Teil I führen wir μ als mittleres Molekulargewicht ein, so dass die durchschnittliche Masse jedes unserer Teilchen μm_p ist, mit m_p der Protonenmasse. Haben wir es nur mit Wasserstoff zu tun, dann ist $\mu = 1$. Haben wir es überwiegend mit leichteren Elementen zu tun, wie Stickstoff, Sauerstoff, Kohlenstoff, Helium und dergleichen, ist in guter Näherung $\mu \approx 2$.

Mit dieser Definition ist $\mu m_p N$ die Gesamtmasse der Teilchen in dem kleinen Volumen V, das wir betrachten, und dementsprechend ist $\mu m_p N/V$ die Massendichte ρ des Volumens. Damit können wir die ideale Gasgleichung umschreiben zu

$$\mu m_p PV = \mu m_p NkT = V\rho kT \quad \Rightarrow \quad P = \frac{k}{\mu m_p} \cdot \rho \cdot T. \tag{8}$$

2.4 Energieerzeugung

Im Inneren von Sternen wird bei Kernfusionsreaktionen Energie freigesetzt, die in Form von Strahlung in den umgebenden Raum abgegeben wird. Wir hatten oben bereits die Leuchtkraft $L(r)$ definiert, nämlich die pro Zeiteinheit durch die Kugel mit Radius r fließende Energie.

Man definiert die Energieerzeugungsrate $\varepsilon(P, T, ...)$ die, wie hier angedeutet, vom Druck, von der Temperatur und möglicherweise noch von anderen Größen abhängt, üblicherweise über

$$\Delta L = \varepsilon \cdot \Delta m,$$

wobei Δm die Masse einer bestimmten Region innerhalb unseres Sterns ist und ΔE die Energie, welche diese Region pro Zeiteinheit freisetzt. Diese Rate hängt direkt mit Überlegungen zur Kernfusion im Inneren von Sternen zusammen. Ganz analog dazu, wie wir für $M(r)$ argumentiert haben, gilt: Beim Übergang von r zu $r+\Delta r$ kommt genau jener Anteil an freigesetzter Energie hinzu, der von der Materie in der Kugelschale mit Radius r erzeugt wird und, der Definition von ε nach, proportional zur Masse dieser

Kugelschale ist. Damit ist

$$\Delta L \equiv L(r + \Delta r) - L(r) = \varepsilon \cdot 4\pi r^2 \cdot \Delta r \cdot \rho(r),$$

oder, einmal mehr als infinitesimale Version für kleine Radiusunterschiede,

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}r} = \varepsilon \cdot 4\pi r^2 \cdot \rho(r). \tag{9}$$

Das ist die dritte unserer Grundgleichungen. Mit den Kernfusionsreaktionen, von denen $\varepsilon(P, T, ...)$ abhängt, werden wir uns in einer späteren Vorlesung (chemische Evolution, 16.1.2018) noch näher auseinandersetzen. An dieser Stelle geht es uns zunächst darum, wie $\varepsilon(P, T, ...)$ den Sternaufbau beeinflusst.

2.5 Energietransport

Als nächstes müssen wir uns darum kümmern, was denn überhaupt dafür verantwortlich ist, dass Energie im Inneren unseres Sterns in Richtung Oberfläche transportiert werden kann, sprich: Wir müssen einen Mechanismus ausfindig machen, der erklärt, wie es denn zu dem von uns als $L(r)$ bezeichneten Energiestrom kommt.

Für diesen Energietransport gibt es mehrere Möglichkeiten: Herkömmliche Wärmeleitung beispielsweise, oder aber Strahlung, die nach außen läuft. Eine dritte Möglichkeit ist die Konvektion, also ein Prozess, bei dem Materie sich bewegt und die in sich gespeicherte Energie mitführt. Ein Alltagsbeispiel für Konvention ist brodelndes Wasser in einem Kochtopf: Heiße Wasseranteile steigen dabei an verschiedenen Stellen nach oben, kältere sacken ab in Richtung Topfboden.

Konvektion ist recht schwierig zu beschreiben. Für die anderen beiden Mechanismus machen wir den Ansatz, dass die Menge an transportierter Energie pro Zeiteinheit zum Temperaturgefälle

$$\frac{\Delta T}{\Delta r}$$

proportional ist – je mehr sich die Temperaturen zweier Regionen unterscheiden, umso mehr Energie wird pro Zeiteinheit von einer Region in die andere transportiert. Sind alle anderen Bedingungen gleich, dann ist die transportierte Energie pro Zeiteinheit außerdem zum Inhalt der Fläche proportional, durch die der Energietransport abläuft. In unserem Falle erfolgt der Transport durch die Kugelfläche beim Radius r. Wir kommen damit auf

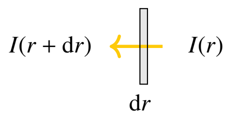
$$L(r) = -4\pi r^2 \cdot \sigma(T, \rho) \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}. \tag{10}$$

Das Minuszeichen stellt sicher: Energie wird dann netto von innen nach außen transportiert, wenn die Temperatur T mit zunehmendem Radius r abnimmt, innere Schichten also heißer sind als äußere. Den Proportionalitätsfaktor nennen wir $\sigma(T)$, und er wird im allgemeinen von der Temperatur T und der Dichte ρ abhängen.

2.6 Strahlungsdruck

Angenommen, auf eine materiegefüllte Region fällt Strahlung mit einer Intensität I (durch eine Fläche fließende Energie pro Zeiteinheit pro Flächeneinheit). Wieviel von dieser Strahlung kommt ein Stückchen weiter hinten an? Die Materie, durch welche sich die Strahlung fortbewegen wird, wird sicher einiges an Strahlung absorbieren, andererseits auch Strahlung in alle Richtungen abgeben. Das Netto-Resultat ist die *effektive Absorption* von Strahlung in jenem Bereich.

Betrachten wir insbesondere die für unsere Sternmodelle interessante radiale Richtung, und darin eine kleine Region, die in radiale Richtung von r bis $r + \mathrm{d}r$ reicht:



Die Absorption ist proportional zur einfallenden Intensität: ein fester Anteil der Strahlung wird absorbiert. Wie groß dieser Anteil ist, hängt von der Materiedichte in der betreffenden Region ab. Bei vergleichsweise geringen Dichten machen wir den Ansatz, dass der absorbierte Anteil direkt proportional ist zur Materiedichte $\rho(r)$ in der betreffenden Region.

Unser Ansatz lautet dann:

$$I(r + \mathrm{d}r) = (1 - \kappa\,\rho(r)\,\mathrm{d}r) \cdot I(r) \tag{11}$$

mit dem Absorptionskoeffizienten κ. Das κ wird im allgemeinen von der Wellenlänge der betrachteten Strahlung abhängen – ein und dieselbe Staubwolke beispielsweise kann für sichtbares Licht undurchdringlich, für Nahinfrarotlicht dagegen so gut wie durchsichtig sein. Diese Wellenlängenabhängigkeit vernachlässigen wir aber aufs erste.

Der obige Ansatz

$$\mathrm{d}I = -\kappa\,\rho(r)\,I(r)\,\mathrm{d}r. \tag{12}$$

Nun haben Lichtteilchen aber, wie wir gesehen haben, immer auch einen Impuls p, der mit ihrer Energie E über die relativistische Beziehung $E = pc$ zusammenhängt. Pro Zeiteinheit und Flächeneinheit wird daher durch unser Materiestück ein Impuls

$$-\frac{\kappa}{c}\,\rho(r)\,I(r)\,\mathrm{d}r$$

transportiert. Die Größe „Impuls pro Zeiteinheit“ ist eine Kraft, und diese Größe dann auch noch pro Flächeneinheit betrachtet ist per Definition der Druck, der auf die betrachtete Fläche wirkt. Aufgrund der Wechselwirkung von Strahlung und Materie erfährt unser Stern demnach einen Strahlungsdruckzuwachs

$$dP_{rad} = -\frac{\kappa}{c}\,\rho(r)\,I(r)\,\mathrm{d}r, \tag{13}$$

oder, umgeschrieben,

$$I = -\frac{c}{\kappa\,\rho(r)} \cdot \frac{\mathrm{d}P_{rad}}{\mathrm{d}r}. \tag{14}$$

Wir haben in den vorangehenden Rechnungen nicht die Intensität $I(r)$, sondern die Leuchtkraft $L(r)$ benutzt. Mit der üblichen Gleichung für den Flächeninhalt einer Kugelfläche hängen diese beiden zusammen als

$$L(r) = 4\pi r^2\,I(r), \tag{15}$$

und die Gleichung wird zu

$$L(r) = -4\pi r^2 \frac{c}{\kappa\rho(r)} \cdot \frac{\mathrm{d}P_{rad}}{\mathrm{d}r}. \tag{16}$$

Den Strahlungsdruck können wir aber direkt in Abhängigkeit von der Temperatur angeben. Nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz ist die Energiedichte von Wärmestrahlung

$$u = \frac{4\sigma_{SB}}{c} T^4, \tag{17}$$

mit der Stefan-Boltzmann-Konstante

$$\sigma_{SB} = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15\, h^3\, c^2} = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 K^4}}. \tag{18}$$

Der zugehörige Strahlungsdruck ist[2]

$$P_{rad} = \frac{u}{3} = \frac{4\sigma}{3c} T^4. \tag{19}$$

Damit ist

$$\frac{\mathrm{d}P_{rad}}{\mathrm{d}r} = \frac{16\sigma}{3c} T^3 \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}. \tag{20}$$

und wir können die Gleichung (16) umschreiben zu

$$L(r) = -\frac{64\pi\sigma}{3} \frac{r^2}{\kappa\rho(r)} T^3 \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \tag{21}$$

bzw. als Gleichung für die r-Abhängigkeit der Temperatur,

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{3}{64\pi\sigma} \cdot \frac{\kappa\rho(r)}{r^2} \cdot \frac{L(r)}{T^3}. \tag{22}$$

2.7 Die vier Grundgleichungen

Damit haben wir insgesamt vier Grundgleichungen für den Sternaufbau, nämlich die Gleichungen (5), (6), (9) und (22), hier noch einmal gemeinsam aufgeführt:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\frac{GM(r)\rho(P,T)}{r^2} \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2 \cdot \rho(P,T) \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}r} = \varepsilon(P,T) \cdot 4\pi r^2 \cdot \rho(P,T) \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{3}{64\pi\sigma} \cdot \frac{\kappa(P,T)\,\rho(P,T)}{r^2} \cdot \frac{L(r)}{T^3}. \tag{22}$$

[2] Das ergibt ein entsprechendes Integral über alle Richtungen; Plausibilitätsüberlegung für den Faktor 1/3: Bei Reflektion an einer Fläche wird nur Impuls in der Richtung senkrecht zur Fläche übertragen; die ist aber nur eine von drei unabhängigen Richtungen im Raum.

Offenbar sind diese Gleichungen nur vollständig definiert, wenn wir zusätzlich noch Gleichungen oder Ausdrücke für die *Materialfunktionen* $\rho, \kappa, \varepsilon$ angeben. Für ρ ist die einfachste Möglichkeit die schon genannte der Zustandsgleichung eines idealen Gases, Gleichung (8)

$$\rho(P, T, \mu) = \frac{\mu m_p}{k} \cdot \frac{P}{T}. \tag{23}$$

Für die Energieerzeugung pro Masseneinheit hatten wir in (**??**) gesehen, dass sie für eine bestimmte Reaktion näherungsweise gegeben ist durch

$$\varepsilon(\rho, T) = \varepsilon_S \cdot \frac{\rho}{\mu} \cdot T^\nu, \tag{24}$$

für einen geeigneten Koeffizienten ν und Proportionalitätsfaktor ε_S.

3 Einfache Modelle

Die vier Grundgleichungen, die in Abschnitt 2.7 noch einmal zusammen aufgeführt waren, stellen ein gekoppeltes System einfacher Differenzialgleichungen dar. Dieses System kann man in Computermodelle von Sternen integrieren und so versuchen, Sternzustände und die Sternentwicklung zu simulieren. Die Entwicklungsverläufe, die sich dabei ergeben, kann man dann untersuchen und mit den Beobachtungsdaten vergleichen.

Computersimulationen sind aber vergleichsweise undurchsichtig — oft kann man zumindest über bestimmte Aspekte dessen, was da vorgeht, mehr lernen, wenn man vereinfachte Modelle betrachtet, welche die Wirklichkeit zwar nur unvollständig und ausschnittsweise beschreiben, dafür aber den Vorteil haben, dass sich zumindest einige der Grundgleichungen in dem betrachteten einfachen Fall direkt lösen lässt. Einige entsprechende Modelle schauen wir uns im folgenden näher an.

3.1 Vereinfachtes Druckgleichgewicht

Die Gleichung (5) ist eine Differenzialgleichung, in der drei verschiedene Funktionen vorkommen: $M(r)$ und $\rho(r)$ auf der rechten Seite, $P(r)$ in Form seiner Ableitung auf der linken. Um eine Lösung zu finden, benötigt man im allgemeinen noch weitere Gleichungen für diese Größen.

Wir treffen folgende vereinfachende Annahme: Die Dichte unseres Körpers möge konstant sein, $\rho = const.$. Das ist für Festkörper bis zu einer gewissen Größe sicher eine gute Näherung, und auch für größere Körper sollte dieses vereinfachte Modell zumindest eine sinnvolle Abschätzung ermöglichen.

Bei konstanter Dichte ist die Gesamtmasse einer Kugel mit Radius r, also unsere Funktion $M(r)$, gerade gegeben durch

$$M(r) = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3. \tag{25}$$

Damit vereinfacht sich die Gleichung (5):

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\frac{4}{3}\pi G \rho^2 r. \tag{26}$$

Das ist eine Gleichung für die Ableitung von $P(r)$, die nur noch von r und von Konstanten abhängt. Solch eine Ableitung kann man direkt integrieren und erhält

$$P(r) = -\frac{2}{3}\pi G\rho^2 r^2 + C \tag{27}$$

mit einer Integrationskonstante C. Den Wert der Integrationskonstante kann man wie folgt bestimmen: Außerhalb des Objekts gibt es keine Materie, und damit auch nichts, was einen Druck ausüben könnte. Wir nehmen an, dass der Verlauf der Funktion $P(r)$stetig ist, dass $P(r)$ also keine Sprünge macht. Damit muss direkt an der Oberfläche unseres (kugelförmigen) Körpers, beim Radius R des Körpers, gelten, dass $P(R) = 0$. Setzt man in (27) $r = R$ und fordert $P(R) = 0$, dann erhält man

$$C = \frac{2}{3}\pi G\rho^2 R^2.$$

Eingesetzt in unsere Druckgleichung (27) ergibt das

$$P(r) = \frac{2}{3}\pi G\rho^2 (R^2 - r^2). \tag{28}$$

Man kann diese Gleichung auch umschreiben, indem man die konstante Dichte ρ durch die Gesamtmasse

$$M \equiv \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \tag{29}$$

ausdrückt, und erhält

$$P(r) = \frac{3}{8\pi}\frac{GM^2}{R^4}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \tag{30}$$

Am höchsten ist der Druck damit, nicht überraschend, im Zentrum. Dort beträgt er

$$P(0) = \frac{3}{8\pi}\frac{GM^2}{R^4} = 10^{14}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2\left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{-4} 10^9\,\mathrm{bar}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2\left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{-4}, \tag{31}$$

ist also im Sonnenzentrum eine Milliarde mal höherer als der Luftdruck von rund einem bar, den wir von der Erdoberfläche gewohnt sind.

3.2 Temperaturen im Kern von Sternen

Nehmen wir an, dass der zentrale Druck (31) durch die thermische Bewegung eines (näherungsweise) idealen Gases aufgebracht wird, dann können wir die ideale Gasgleichung in ihrer Form (8) nutzen, um daraus die zentrale Temperatur des entsprechenden Objekts abzuleiten. Es gilt nämlich

$$T(0) = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\mu m_p}{k}\cdot P(0) = \frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{M}\cdot\frac{\mu m_p}{k}\cdot P(0) = \frac{1}{2}\frac{G\mu m_p}{k}\cdot\frac{M}{R}. \tag{32}$$

In Einheiten von Sonnenmasse und Sonnenradius ausgedrückt heißt das

$$T(0) = \mu\cdot\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\left(\frac{R_\odot}{R}\right)\cdot 10^7\,\mathrm{K}. \tag{33}$$

Zumindest auf den Größenskalen von Sternen mit vergleichbaren Maßen wie die Sonne reden wir über beachtliche Temperaturen. Bei solchen Druck- und Temperaturverhältnissen ist damit zu rechnen, dass Kernfusion, also die Verschmelzung von leichteren zu schwereren Atomkernen eine Rolle spielt.

Wir können dieselbe Rechnung auch unter der Annahme durchführen, dass der Stern durch Strahlungsdruck stabilisiert wird, entsprechend Gleichung (19). Dann haben wir

$$\frac{4\sigma}{3c}\,T(0)^4 \overset{!}{=} \frac{3}{8\pi}\frac{GM^2}{R^4}, \tag{34}$$

oder

$$T(0) = \left(\frac{9}{32\,\pi}\cdot\frac{Gc}{\sigma}\right)^{1/4}\frac{\sqrt{M}}{R} = 2.7\cdot 10^7\,\mathrm{K}\cdot\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{1/2}\left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{-1}. \tag{35}$$

Das bewegt sich in der gleichen Größenordnung wie bei der Stabilisierung durch Gasdruck.

4 Homologie-Relationen

Anstatt die Differentialgleichungen für den Sternaufbau komplett zu lösen, kann man diese Gleichungen auch benutzen, um unterschiedliche Lösungen – das entspricht unterschiedlichen Sternen! – zueinander in Bezug zu setzen. Daraus lassen sich für Sterne, die zu ein und derselben „Ähnlichkeitsklasse“ gehören, Relationen zwischen den grundlegenden Größen L, M, R und T ableiten. Wir haben bereits in der Vorlesung gesehen, dass die Hauptreihensterne eine solche Ähnlichkeitsklasse bilden, und dass derartige Relationen einiges von dem erklären können, was wir rein phänomenologisch in unseren Sterndiagrammen bemerkt hatten!

4.1 Relativer Radius

Als erstes führen wir den relativen Radius ξ ein, definiert als

$$\xi = \frac{r}{R}. \tag{36}$$

Vom Sternzentrum zum Sternrand wächst ξ von 0 auf 1. Der Wert $\xi = 0.5$ entspricht dem Abstand auf halbem Wege zwischen Sternzentrum und Sternoberfläche.

4.2 Homologe Sterne: Definition

Wir betrachten jetzt sogenannte *homologe Sterne*, definiert als Sterne, deren Radiusabhängigkeit von Masse, Druck, Temperatur etc. den gleichen Gesetzmäßigkeiten folgt. Konkret am Beispiel der Masse: hat der erste dieser Sterne die Massenverteilung $M_1(r)$, ausgedrückt als $M_1(\xi)$, und der zweite die Massenverteilung $M_2(\xi)$ dann soll gelten, dass

$$\frac{M_1(\xi)}{M_1} = \frac{M_2(\xi)}{M_2}, \tag{37}$$

mit M_1 und M_2 den Gesamtmassen der beiden Sterne. Auch der relative Radius ξ ist dabei natürlich sternspezifisch definiert, $r = \xi R_1$ für den ersten Stern und $r = \xi R_2$ für den zweiten.

Was das für die Massenverteilung bedeutet, macht man sich am einfachsten an Zahlenbeispielen klar. Befinden sich beispielsweise beim Stern 1 ganze 75% der Masse bei Radiuswerten kleiner als $0.5\,R_1$ (mit R_1 dem Radius der Sternoberfläche), anders gesagt

$$\frac{M_1(\xi = 0.5)}{M_1} = 0.75,$$

dann gilt eine analoge Aussage auch für den Stern 2, nämlich

$$\frac{M_2(\xi = 0.5)}{M_2} = 0.75.$$

Allgemeiner: Jede Aussage über Massenbruchteile, die sich innerhalb einer Kugelschale mit gegebenem ξ-Wert befinden, gilt für beide Sterne gleichermaßen.

Noch einmal anders ausgedrückt: Die Massenverteilung jedes dieser Sterne wird durch dieselbe universelle Funktion $\mathcal{M}(\xi)$ beschrieben:

$$M_1(\xi) = M_1 \cdot \mathcal{M}(\xi)$$

und

$$M_2(\xi) = M_2 \cdot \mathcal{M}(\xi).$$

4.3 Dichten homologer Sterne

In die Grundgleichung (6) eingesetzt, jetzt wieder mit der radiusabhängigen Dichte, ergibt das

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}r} = \frac{M_1}{R_1}\frac{\mathrm{d}\mathcal{M}(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = 4\pi R_1^2 \xi^2 \cdot \rho_1(\xi) \tag{38}$$

Damit ist auch die Dichte jedes der homologen Sterne in der gleichen Weise von ξ abhängig, und zwar gibt es eine universelle Funktion $\varrho(\xi)$, aus der sich die Dichte ermitteln lässt als

$$\rho_1(\xi) = \overline{\rho}_1 \cdot \varrho(\xi) \tag{39}$$

mit

$$\overline{\rho}_1 = M_1/(4/3 \cdot \pi R_1^3), \tag{40}$$

einer Größe, die eine direkte Deutung hat: der mittleren Dichte von Stern 1. Die universelle Funktion genügt der Gleichung

$$\varrho(\xi) = \frac{1}{3\,\xi^2} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathcal{M}(\xi)}{\mathrm{d}\xi}. \tag{41}$$

4.4 Druck homologer Sterne

In der gleichen Weise gehen wir an die anderen Gleichungen heran. Die Gegendruck-Gleichung (5) lässt sich für Stern 1 umschreiben zu

$$\frac{1}{R_1}\frac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}\xi} = -\frac{GM_1 \cdot \mathcal{M}(\xi) \cdot \overline{\rho}_1 \cdot \varrho(\xi)}{R_1^2 \cdot \xi^2} \tag{42}$$

bzw. nach geeignetem Umschreiben

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[P_1(\xi)\cdot\frac{R_1}{\overline{\rho}_1 M_1}\right] = -\frac{G\,\mathcal{M}(\xi)\cdot\varrho(\xi)}{\xi^2}. \tag{43}$$

Auf der rechten Seite stehen nur universelle Funktionen, die nicht von den Kenngrößen $R_1, M_1, \overline{\rho}_1$ des Sterns 1 abhängen. Folglich muss auch die linke Seite von diesen Größen unabhängig sein, mit anderen Worten: auch der Druck $P(\xi)$ lässt sich mithilfe einer universellen Funktion $\mathcal{P}(\xi)$ schreiben, nämlich als

$$P_1(\xi) = \frac{\overline{\rho}_1 M_1}{R_1}\cdot\mathcal{P}(\xi). \tag{44}$$

Für den Radiuswert $\xi = 0$ steht links gerade der Zentraldruck P_{c1} von Stern 1, umgeschrieben

$$\frac{P_{c1}R_1}{\overline{\rho}_1 M_1} = \mathcal{P}(0). \tag{45}$$

Dieselbe Gleichung können wir für einen beliebigen Stern 2 hinschreiben, und der Wert $\mathcal{P}(0)$ ist auf der rechten Seite derselbe wie bei Stern 1. Daraus aber folgt

$$\frac{P_{c1}R_1}{\overline{\rho}_1 M_1} = \frac{P_{c2}R_2}{\overline{\rho}_2 M_2} \equiv \alpha_H, \tag{46}$$

wobei α_H eine für unsere spezifische Serie homologer Sterne charakteristische Konstante ist. Wir haben über die Homologie eine Beziehung für Zentraldruck, Radius, Masse und mittlere Dichte zweier zueinander homologer Sterne abgeleitet! Das ist die zentrale Eigenschaft homologer Sterne: Wir können zwischen ihren Kenngrößen Beziehungen ableiten, ohne die betreffenden Differentialgleichung komplett lösen zu müssen.

4.5 Temperatur homologer Sterne

Mit dieser Information gehen wir jetzt zu unserer Zustandsgleichung, der idealen Gasgleichung (8), die wir für Stern 1 schreiben können als

$$\overline{\rho}_1\cdot\varrho(\xi) = \frac{\mu_1 m_p}{k}\cdot\frac{\overline{\rho}_1 M_1}{R_1}\cdot\frac{\mathcal{P}(\xi)}{T_1(\xi)}. \tag{47}$$

Sie kennen den Drill inzwischen: wir sortieren so um, dass auf der rechten Seite nur noch universelle Größen stehen, in unserem Falle

$$T_1(\xi)\frac{R_1}{\mu_1\,M_1} = \frac{m_p}{k}\cdot\frac{\mathcal{P}(\xi)}{\varrho(\xi)}. \tag{48}$$

Da die rechte Seite universell ist, muss auch die linke Seite eine universelle Funktion $\mathcal{T}(\xi)$ sein, und der Temperaturverlauf von Stern 1 ist gegeben durch

$$T_1(\xi) = \frac{\mu_1\,M_1}{R_1}\cdot\mathcal{T}(\xi). \tag{49}$$

Wieder folgt aus dieser Gleichung eine Beziehung für die Zentraltemperaturen zueinander homologer Sterne, wenn wir $\xi = 0$ einsetzen. Noch interessanter ist, dass für

$\xi = 1$ (realistischer: für einen festen Wert $\xi = \xi_{ob}$ nahe 1) auch eine Beziehung für die Oberflächentemperaturen T_{eff}, also der Temperatur jener Schichten folgt, von denen aus die Strahlung freigesetzt wird, die wir beobachten. Für homologe Sterne 1, 2 gilt dann

$$\frac{T_{eff,1}\, R_1}{\mu_1\, M_1} = \frac{T_{eff,2}\, R_2}{\mu_2\, M_2} \equiv \beta_H, \tag{50}$$

wobei β_H eine weitere für unsere spezifische Serie homologer Sterne charakteristische Konstante ist.

4.6 Leuchtkraft homologer Sterne

Weiter im Text: Die Leuchtkraftgleichung (9) lässt sich für Stern 1 schreiben als

$$\frac{1}{R_1}\,\frac{\mathrm{d}L_1(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = \varepsilon(\xi)\cdot 4\pi R_1^2\,\xi^2\cdot\overline{\rho}_1\cdot\varrho(\xi) = \varepsilon_S\cdot(\overline{\rho}_1)^2\,\frac{\varrho(\xi)^2}{\mu_1}\,4\pi\,R_1^2\,\xi^2\left(\frac{\mu_1 M_1}{R_1}\right)^{\nu}\,\mathcal{T}(\xi)^{\nu}, \tag{51}$$

wobei wir im zweiten Schritt den Ansatz (24) eingesetzt haben. Einmal mehr bringen wir alle von den Sterneigenschaften des Sterns 1 abhängigen Größen auf die linke Seite, und erhalten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[\frac{R_1^{\nu-3}}{(\overline{\rho}_1)^2\mu_1^{\nu-1}M_1^{\nu}}\cdot L_1(\xi)\right] = 4\pi\,\varepsilon_S\,\varrho(\xi)^2\,\xi^2\,\mathcal{T}(\xi)^{\nu}. \tag{52}$$

Wieder gilt: Da die rechte Seite nicht von den Eigenschaften von Stern 1 abhängt, darf es auch die linke nicht. Offenbar ist die Leuchtkraft ebenfalls durch eine universelle Funktion $\mathcal{L}(\xi)$ ausdrückbar, so dass

$$L_1(\xi) = \left[(\overline{\rho}_1)^2\mu_1^{\nu-1}M_1^{\nu}\,R_1^{3-\nu}\right]\cdot\mathcal{L}(\xi) \tag{53}$$

gilt. Auch aus dieser Beziehung können wir eine Relation zwischen den Größen zweiter zueinander homologer Sterne ableiten; mit $L_1(\xi = 1) = L_1$ der Gesamtleuchtkraft, und einer analogen Gleichung für Stern 2, gilt

$$\frac{L_1\,R_1^{\nu-3}}{(\overline{\rho}_1)^2\mu_1^{\nu-1}M_1^{\nu}} = \frac{L_2\,R_2^{\nu-3}}{(\overline{\rho}_2)^2\mu_2^{\nu-1}M_2^{\nu}} \equiv \gamma_H, \tag{54}$$

mit γ_H einer weiteren für diese spezifische Serie homologer Sterne charakteristische Konstante.

4.7 Folgerungen aus der Energietransport-Gleichung

Als letztes schreiben wir die Energietransport-Gleichung (22) um. Ich schreibe dabei die Leuchtkraft als

$$L_1(\xi) = L_1\cdot\mathcal{L}(\xi)/\mathcal{L}(1) \tag{55}$$

und benutze absichtlich nicht den komplizierteren Ausdruck (53). Wir nehmen dabei als Vereinfachung näherungsweise an, dass κ eine Konstante ist. Dann gilt

$$\frac{1}{R_1}\,\frac{\mathrm{d}[\mu_1 M_1/R_1\cdot\mathcal{T}(\xi)]}{\mathrm{d}\xi} = -\frac{3\kappa}{64\pi\sigma}\cdot\frac{\overline{\rho}_1\varrho(\xi)}{R_1^2\,\xi^2}\cdot\frac{L_1\cdot\mathcal{L}(\xi)}{[\mu_1\,M_1/R_1\cdot\mathcal{T}(\xi)]^3}. \tag{56}$$

Einmal mehr bringen wir alle Größen, die von den Eigenschaften des Sterns 1 abhängen, auf die eine Seite der Gleichung, alle universellen Größen auf die andere. Das Ergebnis ist

$$\frac{\overline{\rho}_1\, L_1\, R_1^3}{(\mu_1\, M_1)^4} = -\frac{64\,\pi\,\sigma}{3\,\kappa} \cdot \frac{\xi^2\,\mathcal{T}(\xi)^3}{\varrho(\xi)\,\mathcal{L}(\xi)} \frac{\mathrm{d}\mathcal{T}(\xi)}{\mathrm{d}\xi}. \tag{57}$$

Und einmal mehr folgt aus dem Umstand, dass die rechte Seite nicht von den Eigenschaften des Sterns 1 abhängt, dass es auch die linke Seite nicht tun kann. Für homologe Sterne gilt demnach

$$\frac{\overline{\rho}_1\, L_1\, R_1^3}{(\mu_1\, M_1)^4} = \frac{\overline{\rho}_2\, L_2\, R_2^3}{(\mu_2\, M_2)^4} \equiv \delta_H, \tag{58}$$

mit δ_H der letzten hier eingeführten, für unsere Serie homologer Sterne charakteristischen Konstante.

4.8 Allgemeine Relationen für homologe Sterne

Die Homologie-Relationen (46), (50), (54) und (58) lassen sich in folgender nützlicher Weise umschreiben. Aus (58) und der Gleichung (40) für die mittlere Dichte folgt

$$L_1 = \left(\frac{4}{3}\,\pi\,\delta_H\right) \cdot \mu_1^4 \cdot M_1^3. \tag{59}$$

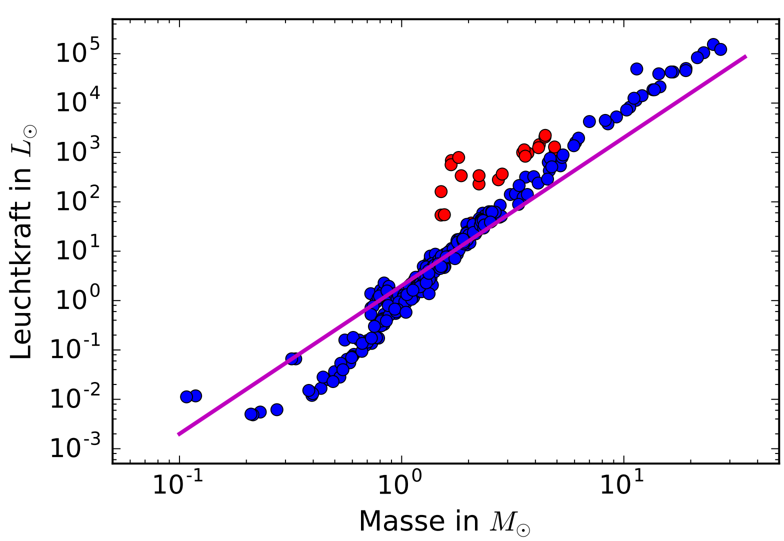
Das gilt für alle Sterne, nicht nur für Stern 1, und zwar mit derselben Proportionalitätskonstante. Wir schreiben daher allgemein für unsere homologen Sterne

$$L \sim \mu^4 \cdot M^3. \tag{60}$$

Wenn wir annehmen, dass unsere homologen Sterne außerdem dieselbe chemische Zusammensetzung haben, also jeweils den gleichen Wert für μ, gilt sogar noch allgemeiner

$$L \sim M^3. \tag{61}$$

Wir können diese Relation anhand unseres Satzes von Doppelsternen testen, für die wir sowohl Massen als auch Leuchtkräfte kennen. Hier ist in lila eine Kurve mit $L \sim M^3$ im entsprechenden Diagramm platziert:



Das ist kein perfekter Fit, aber gibt einigermaßen gut wieder, wie die – in Wirklichkeit im Detail eher leicht S-förmige Kurve – verläuft. Der gerade Teil der Kurve verläuft eher wie $L \sim M^4$.

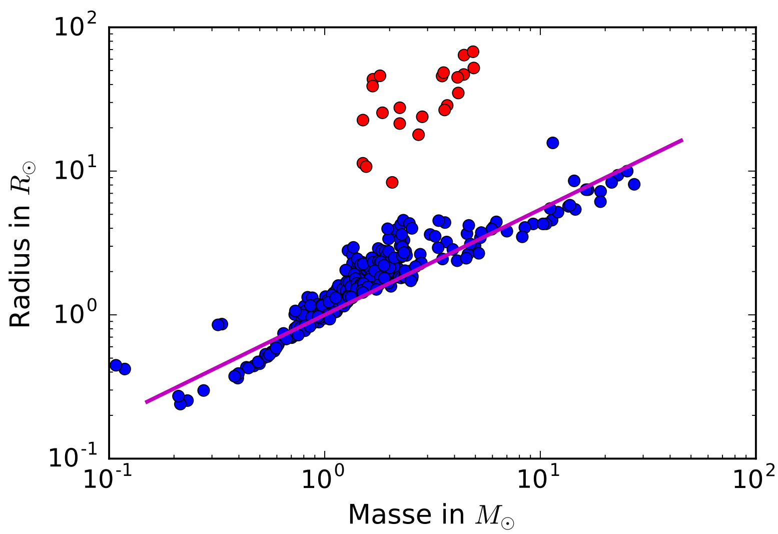
Analog dazu können wir aus (60) und (58) die Relation

$$R \sim M^{\frac{\nu-1}{\nu+3}} \cdot \mu^{\frac{\nu-4}{\nu+3}}. \tag{62}$$

Für die oben angegebenen Werte von ν ist klar, dass der Exponent von M zwischen 0.4 und 1 liegen wird, der von μ zwischen 0 und 1. Nehmen wir einmal mehr vereinfachend an, dass unsere homologen Sterne jeweils dieselbe Zusammensetzung und damit denselben Wert für μ haben. Für solche Sterne ist

$$R \sim M^{\frac{\nu-1}{\nu+3}}. \tag{63}$$

Wir vergleichen dieses Ergebnis wieder mit unseren Doppelstern-Daten. Das Abknicken der Kurve kann unser einfaches Modell nicht repräsentieren, aber der Exponent liegt in der Tat in dem vorhergesagten Bereich; hier ist die Kurve für $\nu = 12$ eingezeichnet:



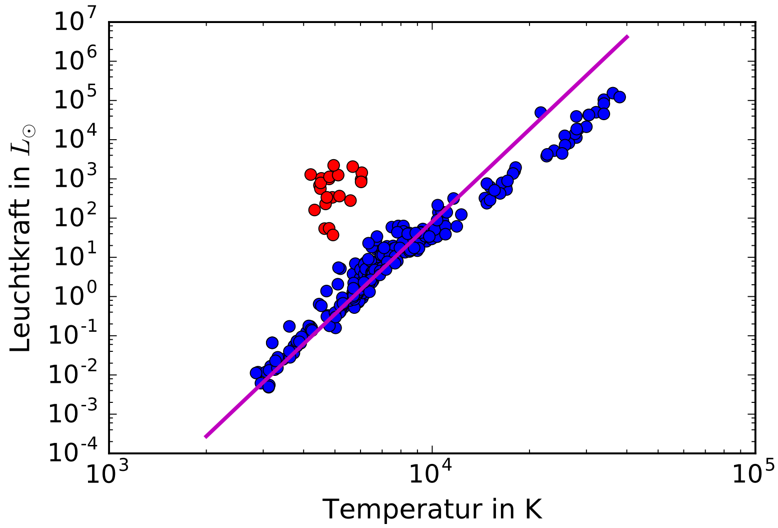
Es gibt eine weitere interessante Kombination. Aus der Masse-Leuchtkraft-Beziehung
alität mit geeigneter Proportionalitätskonstante auch für die Effektivtemperatur T_{eff} gilt. Für die Effektivtemperatur haben wir aber noch einen weiteren Zusammenhang: Der Stern strahlt als schwarzer Körper, und damit ist

$$L \sim R^2 \cdot T_{\text{eff}}^4. \tag{64}$$

Wir nehmen außerdem die Masse-Leuchtkraft-Beziehung (61) her, ersetzen die Masse durch den Radius via (63), nehmen die m-te Potenz der resultierenden Gleichung und multiplizieren das Ergebnis mit (64). Durch geeignete Wahl von m können wir das Ergebnis so umformen, dass R nicht mehr darin vorkommt ($R^0 = 1$) und erhalten als Beziehung zwischen Leuchtkraft und effektiver Temperatur

$$L \sim T_{\text{eff}}^{\frac{12(\nu+3)}{\nu+11}}. \tag{65}$$

Für ν zwischen 4 und sehr großen Werten variiert der Exponent zwischen 5.6 und 12. Auch diesen Zusammenhang können wir wieder mit unseren Doppelstern-Daten vergleichen; hier das entsprechende Hertzsprung-Russell-Diagramm, das die Leuchtkraft gegen die Temperatur aufträgt, hier mit dem gleichen Wert $\nu = 12$ wie im letzten Diagramm:



4.9 Lebensdauer auf der Hauptreihe

Aus den Eigenschaften von Atomkernen und den Kernfusionsreaktionen in Sternen (bei uns erst am 16.1.2018 Thema) kann man den auf die Masse bezogenen Wirkungsgrad der Kernfusion von Wasserstoff zu Helium berechnen, nämlich

$$\eta = \frac{\Delta E}{Mc^2} = 0.007. \tag{66}$$

Verschmelzen wir die Masse M an Wasserstoffatomen zu Helium, dann wird dabei die Energie $0.007 \cdot Mc^2$ frei.

Aus diesem Wirkungsgrad kann man die Zeit abschätzen, die ein Stern mit einer Sonnenmasse überhaupt so hell strahlen kann wie die Sonne. Unter der (vereinfachenden) Annahme, dass der Stern ursprünglich ganz aus Wasserstoff besteht, kommen wir auf

$$\tau = 0.007\,\frac{M_\odot c^2}{L_\odot} = 3 \cdot 10^{18}\,\mathrm{s} = 10^{11}\,\mathrm{a}. \tag{67}$$

Die tatsächliche Zeit ist rund 10 Mal kleiner; sie beträgt rund 10^{10} Jahre, 10 Milliarden Jahre. Tatsächlich strahlt der Stern gegen Ende seines Lebens nämlich deutlich stärker als zur jetzigen Zeit.

Von solchen Entwicklungseffekten abgesehen kommt in dem Ausdruck sowohl die Leuchtkraft als auch die Masse vor; wir haben in (61) gesehen, dass diese für homologe Sterne über $L \sim M^3$ verknüpft sind.

Setzen wir diese Beziehung ein, dann erhalten wir

$$\tau = \tau_\odot \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-2}. \tag{68}$$

Realistischer, das hatten wir im Vergleich mit unseren Doppelsternen gesehen, ist die Massenabhängigkeit der Leuchtkraft sogar noch stärker, nämlich ungefähr $L \sim M^4$. Dann skalieren die Lebensdauern sogar wie

$$\tau = \tau_\odot \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-3} . \tag{69}$$

Ein Stern, der 10 Mal mehr Masse besitzt wie die Sonne, hat demnach eine Lebensdauer von nur einem Tausendstel der Lebensdauer der Sonne: nur rund 10 Millionen Jahre statt 10 Milliarden Jahren. Der massereichste Stern unter unseren Doppelsternen hatte eine Masse von rund 30 Mal der Sonnenmasse. Seine Lebensdauer beträgt dementsprechend nur rund 400 000 Jahre – astronomisch gesehen ein bloßer Augenblick!

Hier ist, entsprechend der Formel (69) umgerechnet, ein Histogramm der Gesamt-Lebensdauern unserer Doppelsterne: