

Astronomische Objekte modellieren II: Wärme, Strahlung, Gegendruck

Markus Pössel

Handout zur Vorlesung „Methoden der Astronomie für
Nichtphysiker“ am 8.12.2016

1 Einige Eigenschaften von Sternen

Die grundlegende Situation zu Gravitation und Gegendruck hatte ich bereits in der letzten Vorlesung und im Handout **Astronomische Objekte modellieren I** beschrieben, hier als Wiederholung: Wir betrachten ein kugelsymmetrisches Objekt. Als erste Vereinfachung untersuchen wir so etwas wie einen Gleichgewichtszustand, also einen Zustand, der sich mit der Zeit nicht oder nur langsam verändert.

Bestimmte Arten von Kugeln, nämlich Festkörper, hatten wir in Teil I bereits behandelt. Hier soll es um Objekte gehen, die so heiß sind, dass der thermische Gegendruck eine wichtige Rolle für ihre Stabilität spielt. Wir brauchen auch nicht um den heißen Brei (oder in diesem Falle: den heißen Plasmaball) herumreden: Die wichtigste Objektklasse, die wir auf diese Weise beschreiben wollen, sind Sterne; wir haben nicht den Anspruch, alle möglichen Objekte mit thermischem Gegendruck zu verstehen, sondern beziehen durchaus auch die Beobachtungsdaten für Sterne mit ein.

2 Modell: kugelsymmetrisch und unveränderlich

Uns interessieren die grundlegenden Eigenschaften eines solchen Objekts: welche Masse hat es, und wie verteilt sich diese Masse? Wie hoch ist der Druck in unterschiedlichen Abständen vom Zentrum? Wo wird wie viel Strahlung freigesetzt? Welche Temperatur haben die unterschiedlichen Regionen des Objekts?

Diese Eigenschaften drücken wir als physikalische Größen aus, und aufgrund der Kugelsymmetrie dürfen diese Größen nur vom Abstand r vom Zentrum der Kugel abhängen. Hier sind einige der Größen:

- die Dichte $\rho(r)$ (Masse pro Volumen)
- die eingeschlossene Masse $M(r)$, definiert als denjenigen Teil der Gesamtmasse des Objekts, der sich innerhalb der Kugeloberfläche mit Radius r befindet
- der Druck $P(r)$ als Funktion des Abstandes vom Zentrum
- die Helligkeit $L(r)$ als diejenige Energie, die von den Objektregionen innerhalb der Kugelschale mit Radius r insgesamt pro Zeiteinheit nach außen abgestrahlt wird
- die Temperatur $T(r)$ der unterschiedlichen Schichten – wenn sich eine solche denn sinnvoll definieren lässt

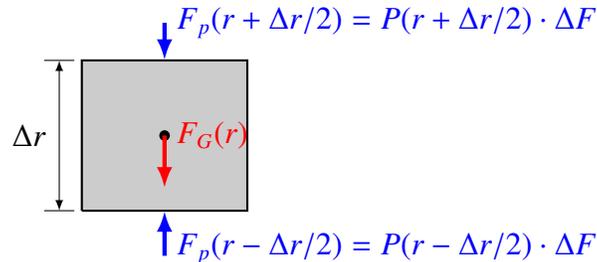
Über diese Funktionen definieren sich auch bestimmte zusammenfassende Parameter des Objekts. Fällt die Dichte $\rho(r)$ ab einem bestimmten Abstand R auf Null und bleibt auch bei größeren Abständen Null, dann ist R so etwas wie der Radius unseres Objekts, und $M \equiv M(R)$ die Gesamtmasse. Wird dementsprechend alle Helligkeit nur innerhalb des durch R definierten Gebiets erzeugt, dann ist $L \equiv L(R)$ die Gesamthelligkeit. Mittel wir $\rho(r)$ über alle Teilregionen, erhalten wir so etwas wie die mittlere Dichte $\bar{\rho}$ unseres Objekts.

Für eine genauere Modellierung können wir außerdem Größen definieren, welche die chemische Zusammensetzung des Objekts definieren. In der Astronomie ist Wasserstoff das häufigste Element, gefolgt von Helium. Alle weiteren Elemente rangieren in der Astronomie oft unter „ferner liefern“, oder im Sprachgebrauch der Astronomen: Metalle. (Und ja, dieser Sprachgebrauch ist komplett unabhängig von dem, was Chemiker oder Mineralogen Metalle nennen. Metalle sind in der Astronomie alle chemischen Elemente außer Wasserstoff und Helium.)

Für unsere Modelle von Sternen und ähnlichen Objekten wird wichtig sein: welche dieser Größen hängen über physikalische Gleichungen zusammen? Daraus ergibt sich auch: Welche Parameter etwa eines Sterns kann man vorgeben (beispielsweise die Gesamtmasse, und die chemische Zusammensetzung), und welche Eigenschaften sind nach diesen Vorgaben bereits eindeutig bestimmt, jedenfalls nicht mehr frei wählbar?

3 Gravitation und Gegendruck

Eine erste Gleichung hatte ich im [Handout zu Teil I, Abschnitt 6](#) bereits abgeleitet dort hatten wir kleinen Ausschnitt eines kugelsymmetrischen Körpers betrachtet: ein kleines Volumen, hier im Querschnitt dargestellt:



Aus der Bedingung, dass sich Gravitationskraft und Druckkräfte zu Null summieren sollten, damit das kleine Volumenstück insgesamt keine Beschleunigung erfährt und sich der Stern insgesamt nicht ändert, hatte ich dort

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}. \quad (1)$$

abgeleitet, unsere erste Grundgleichung für den Aufbau astronomischer Objekte.

4 Masse und Dichte

Die zweite Grundgleichung ist noch einfacher. Wie erwähnt war $M(r)$ die eingeschlossene Masse, definiert als denjenigen Teil der Gesamtmasse des Objekts, der sich innerhalb der Kugel­fläche mit Radius r befindet. Das heißt aber auch:

$$\Delta M(r) \equiv M(r + \Delta r) - M(r),$$

also der Massenunterschied zwischen der beim Radiuswert r und der beim Radiuswert $r + \Delta r$ eingeschlossenen Masse, ist gerade die Masse in der Kugelschale, die von den Kugel­flächen mit den Radien r und $r + \Delta r$ begrenzt wird. Diese Kugelschale hat näherungsweise die Masse¹

$$\Delta M(r) = 4\pi r^2 \cdot \Delta r \cdot \rho(r),$$

¹ Wem suspekt erscheint, dass wir hier bei einem gebogenen Gebilde Grundfläche mal Höhe gerade so multiplizieren wie bei gerader Grundfläche, kann alternativ rechnen: Kugelschalenvolu-

also Kugelschalenfläche mal Kugelschalendicke mal Dichte. Wenn wir zu infinitesimalen Größen übergehen, wird diese Gleichung zu

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \cdot \rho(r). \quad (2)$$

Das ist die zweite unserer Grundgleichungen.

5 Temperatur, Druck, Volumen

In Teil I hatten wir den Druck aus dem Quantenverhalten von Festkörpern abgeleitet. In diesem Teil soll es um Objekte gehen, bei denen der Druck auf andere Weise entsteht: durch thermische Bewegung.

Den Zusammenhang zwischen Druck P , Teilchenzahl N , Volumen V und Temperatur T liefert uns die ideale Gasgleichung

$$PV = NkT, \quad (3)$$

mit $k = 1.38064852 \cdot 10^{-23}$ J/K der Boltzmann-Konstante. In der statistischen Physik kann man diese Gleichung für ein einfaches Gas (z.B. keine nennenswerte Energie in der Rotation oder Vibration der Moleküle gespeichert) direkt ableiten. Die ideale Gasgleichung ist eine sogenannte Zustandsgleichung, die Eigenschaften des Stoffes beschreibt, aus dem unser Objekt besteht.

Auch ohne Herleitung kann man einige plausible Eigenschaften von Gasen direkt aus der Gleichung ablesen. Hält man beispielsweise das Volumen eines Gases konstant und erhöht die Temperatur, dann erhöht sich auch der Druck (man denke an die Verhältnisse in einem Dampfdrucktopf).

Wir haben die Teilchenzahl N bislang nicht als Parameter verwendet, aber das macht nichts, denn wir können die ideale Gasgleichung wie folgt umschreiben. Betrachten wir ein kleines Volumen V innerhalb unseres Objekts. Wie in Teil I führen wir μ als mittleres Molekulargewicht ein, so dass die durchschnittliche Masse jedes unserer Teilchen μm_p ist, mit m_p der Protonenmasse. Haben

men ist Kugelvolumen mit Radius $r + \Delta r$ minus Kugelvolumen mit Radius r , nämlich

$$\frac{4}{3}\pi [(r + \Delta r)^3 - r^3].$$

Beim ausmultiplizieren ist der lineare Term in Δr gerade $4\pi r^2 \cdot \Delta r$; die Terme proportional zu Δr^2 und Δr^3 werden diesem Term gegenüber immer kleiner und unwichtiger, je kleiner wir Δr wählen.

wir es nur mit Wasserstoff zu tun, dann ist $\mu = 1$. Haben wir es überwiegend mit leichteren Elementen zu tun, wie Stickstoff, Sauerstoff, Kohlenstoff, Helium und dergleichen, ist in guter Näherung $\mu \approx 2$.

Mit dieser Definition ist $\mu m_p N$ die Gesamtmasse der Teilchen in dem kleinen Volumen V , das wir betrachten, und dementsprechend ist $\mu m_p N/V$ die Massendichte ρ des Volumens. Damit können wir die ideale Gasgleichung umschreiben zu

$$\mu m_p P V = \mu m_p N k T = V \rho k T \quad \Rightarrow \quad P = \frac{k}{\mu m_p} \cdot \rho \cdot T. \quad (4)$$

6 Erstes einfaches Modell: konstante Dichte ρ

Ein sehr vereinfachtes Modell mit konstanter Dichte hatten wir in [Handout zu Teil I, Abschnitt 7](#) bereits berechnet. Bei konstanter Dichte konnten wir die Massengleichung (2) direkt integrieren zu

$$M(r) = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3, \quad (5)$$

die Druckgleichung (1) vereinfachte sich zu

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{4}{3} \pi G \rho^2 r, \quad (6)$$

und wir hatten diese Gleichung integriert, die Integrationskonstante über die Bedingung $P(R) = 0$ bestimmt, und die Gleichung

$$P(r) = \frac{2}{3} \pi G \rho^2 (R^2 - r^2) \quad (7)$$

für $P(r)$ erhalten. Eine nützliche alternative Form ergab sich, wenn wir die konstante Dichte ρ durch die Gesamtmasse

$$M \equiv \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (8)$$

ersetzen, nämlich

$$P(r) = \frac{3}{8\pi} \frac{GM^2}{R^4} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (9)$$

Der Druck ist dann im Zentrum am höchsten, und beträgt

$$P(0) = \frac{3}{8\pi} \frac{GM^2}{R^4}. \quad (10)$$

In Einheiten von Sonnenmasse und Sonnenradius beträgt der Zentraldruck

$$P(0) = 10^{14} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 10^9 \text{ bar}, \quad (11)$$

also eine Milliarde mal höherer Druck als der Luftdruck von rund einem bar, den wir von der Erdoberfläche gewohnt sind.

Nehmen wir an, dass dieser zentrale Druck durch die thermische Bewegung eines (näherungsweise) idealen Gases aufgebracht wird, dann können wir die ideale Gasgleichung in ihrer Form (4) nutzen, um daraus die zentrale Temperatur des entsprechenden Objekts abzuleiten. Es gilt nämlich

$$T(0) = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\mu m_p}{k} \cdot P(0) = \frac{4}{3} \pi \frac{R^3}{M} \cdot \frac{\mu m_p}{k} \cdot P(0) = \frac{1}{2} \frac{G \mu m_p}{k} \cdot \frac{M}{R}. \quad (12)$$

In Einheiten von Sonnenmasse und Sonnenradius ausgedrückt heißt das

$$T(0) = \mu \cdot \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \left(\frac{R_\odot}{R} \right) \cdot 10^7 \text{ K}. \quad (13)$$

Zumindest auf den Größenskalen von Sternen mit vergleichbaren Maßen wie die Sonne reden wir über beachtliche Temperaturen. Bei solchen Druck- und Temperaturverhältnissen, das werden wir im Abschnitt 7.4 weiter erkunden, ist damit zu rechnen, dass Kernfusion, also die Verschmelzung von leichteren zu schwereren Atomkernen eine Rolle spielt.

Wir können dieselbe Rechnung auch unter der Annahme durchführen, dass der Stern durch Strahlungsdruck stabilisiert wird, entsprechend Gleichung (45). Dann haben wir

$$\frac{4\sigma}{3c} T(0)^4 \stackrel{!}{=} \frac{3}{8\pi} \frac{GM^2}{R^4}, \quad (14)$$

oder

$$T(0) = \left(\frac{9}{32\pi} \cdot \frac{Gc}{\sigma} \right)^{1/4} \frac{\sqrt{M}}{R} = 2.7 \cdot 10^7 \text{ K} \cdot \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{R}{R_\odot} \right)^{-1}. \quad (15)$$

Das bewegt sich in der gleichen Größenordnung wie bei der Stabilisierung durch Gasdruck.

7 Kernfusion

7.1 Atomkerne

Wir hatten uns in Teil 1 vor allem mit Atomen beschäftigt. Jetzt müssen wir uns auch mit Atomkernen beschäftigen.

Als erstes etwas zu den Bindungsenergien solcher Kerne. Mithilfe von Massenspektrometrie kann die Masse von Atomkernen genau vermessen werden. Dazu werden die Atomkerne (in vollständig ionisierter Form, also gänzlich ohne Elektronen!) erst durch ein elektrisches und dann durch ein magnetisches Feld geschickt, die in geeignetem Abstand und mit geeigneter Stärke vorliegen, dass alle Ionen gleicher spezifischer Ladung q/m nach Durchlaufen der Feldkonfiguration am gleichen Ort einer Photoplatte oder eines Photodetektors ankommen. Aus dem Grad der Ablenkung lässt sich die spezifische Ladung erschließen; kennt man zusätzlich die Ladung, die ja ein Vielfaches der Elementarladung e betragen muss, $q = Ze$, dann kann man die Masse bestimmen.

Atomkerne werden mit zwei Kennzahlen beschrieben: die Ladungszahl Z gibt die Anzahl der Protonen im Atomkern an; da jedes Proton die Elementarladung $+e$ trägt, ist die Gesamtladung des Atomkerns $Q = +Ze$. In seiner normalen, elektrisch insgesamt ungeladenen Form besitzt das entsprechende Atom zusätzlich zum Atomkern noch Z Elektronen, jedes davon mit elektrischer Ladung $-e$. Die Massenzahl A gibt die Gesamtanzahl der Protonen und Neutronen (Sammelbegriff: Nukleonen) an; die Anzahl der Neutronen im Kern ist dementsprechend $A - Z$.

Die Komponenten des Kerns, nämlich Z Protonen, jedes davon mit der Masse

$$m_p = 1.672621777 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 938.272046281 \text{ MeV}/c^2$$

und $A - Z$ Neutronen, jedes davon mit der Masse

$$m_n = 1.674927351 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 939.565378501 \text{ MeV}/c^2.$$

Die jeweils zweite Form der Massenangabe nutzt die Energieeinheit $1 \text{ eV} \equiv$ (definiert als der Energiezuwachs, den ein Elektron beim Durchlaufen einer Spannung von einem Volt erfährt) und den Umstand, dass diese Energieeinheit, geteilt durch das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit, eine Masseneinheit definiert (man denke an die berühmte Formel $E = mc^2$).

Die Gesamtmasse der Komponenten eines Atomkerns wäre damit

$$\bar{m}_{A,Z} = Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n. \quad (16)$$

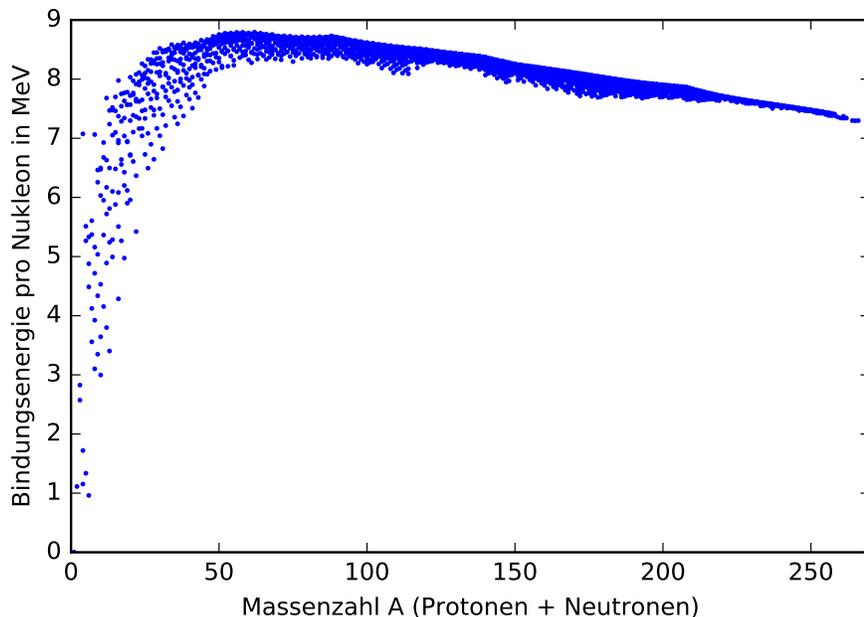
7.2 Bindungsenergien

Tatsächliche Atomkernmassen sind immer etwas kleiner. Das ist im Prinzip nicht überraschend. Nach Einsteins Äquivalenzformel $E = mc^2$ entspricht jeder Energie eine Masse; Bindungsenergien, abgeleitet z.B. aus den potenziellen Energien einer

anziehenden Kraft, sind negativ, und die aufsummierten Komponentenenergien zuzüglich der negativen Masse, die der Bindungsenergie des Kerns entspricht und üblicherweise als Betrag der Bindungsenergie $B_{A,Z}$ pro Nukleon angegeben wird, ist deswegen eben etwas kleiner als $\bar{m}_{A,Z}$,

$$m_{A,Z} = \bar{m}_{A,Z} - B_{A,Z}/c^2 \cdot A < \bar{m}_{A,Z}. \quad (17)$$

Die Beschreibung der starken Kernkraft, welche die Nukleonen im Kern zusammenhält, ist deutlich weniger einfach als die der elektrostatischen Kraft, die Elektronen an Atomkerne bindet. Aber mit Hilfe des Zusammenhangs (17) können wir immerhin experimentell, durch die massenspektrometrische Bestimmung von Atomkernmassen, die Werte von $B_{A,Z}$ für verschiedene Atomkerne bestimmen. Das Ergebnis sieht wie folgt aus (Daten der IAEA, Stand 2012):



Erste interessante Eigenschaft dieses Diagramms ist die Größenordnung. In Teil I hatten wir gesehen, dass die Energie, die man benötigt, um das einzige Elektron eines Wasserstoffs vom Atomkern zu trennen 13.6 eV beträgt, dass die anderen Ionisierungsenergien dieselbe Größenordnung haben und dass chemische Bindungsenergien noch deutlich kleiner sind. Hier haben wir es mit Bindungsenergien im Bereich von Mega-Elektronenvolt zu tun, also rund 100 000 Mal größer.

7.3 Größenabschätzung

Das erlaubt uns eine Größenabschätzung für Atomkerne. In Teil I hatten wir im Abschnitt 5 des Handouts die charakteristischen Größen der Bindung des Elektrons an den Wasserstoffkern abgeschätzt. Wir vernachlässigen Unterschiede im Bindungsmechanismus – die starke Kernkraft hat, wie gesagt, einige kompliziertere Eigenschaften – und rechnen die für das Wasserstoffatom erhaltenen Größen um. Für die Rydbergenergie hatten wir für das Wasserstoffatom den Wert

$$E_{\text{Ryd},H} = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \approx -2.17987217572 \cdot 10^{-18} \text{ J} = -13.6 \text{ eV} \quad (18)$$

erhalten. Betrachten wir stattdessen die Bindung eines einzelnen Protons an den Rest seines Atomkerns, dann müssen wir die Elektronenmasse m_e durch die Protonenmasse m_p ersetzen, und die Kopplungskonstante e^2/ϵ_0 , welche die Stärke der bindenden Kraft beschreibt, durch eine geeignete Alternative g_{nuc}^2 . Die Größe von g_{nuc} können wir abschätzen, wenn wir das Messergebnis verwenden, dass die Bindungsenergie eines einzelnen Nukleons im Atomkern, siehe die obige Abbildung, bei rund 8 MeV liegen sollte.

Damit erhalten wir

$$\frac{E_{\text{Ryd},\text{nuc}}}{E_{\text{Ryd},H}} \approx \frac{m_p}{m_e} \cdot \left(\frac{g^2}{e^2/\epsilon_0} \right)^2,$$

also

$$g^2 = e^2/\epsilon_0 \cdot \sqrt{\frac{E_{\text{Ryd},\text{nuc}}}{E_{\text{Ryd},H}} \cdot \frac{m_e}{m_p}} \sim 18 \cdot e^2/\epsilon_0. \quad (19)$$

Mit dieser Beziehung können wir so etwas wie den Bohrschen Radius für einen Atomkern berechnen. Beim Wasserstoff war der Bohrsche Radius gewesen

$$a_{0,H} = \frac{4\pi\epsilon_0 h^2}{(2\pi)^2 e^2 m_e} \approx 5 \cdot 10^{-11} \text{ m}. \quad (20)$$

Den nuklearen Bohr-Radius erhalten wir durch die Ersetzung der Kopplungskonstante e^2/ϵ_0 durch $g^2 \approx 18e^2/\epsilon_0$ und durch die Ersetzung der Elektronen- durch die Protonenmasse,

$$a_{0,\text{nuc}} = a_{0,H} \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{m_e}{m_p} \approx 1.6 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 1.6 \text{ fm}. \quad (21)$$

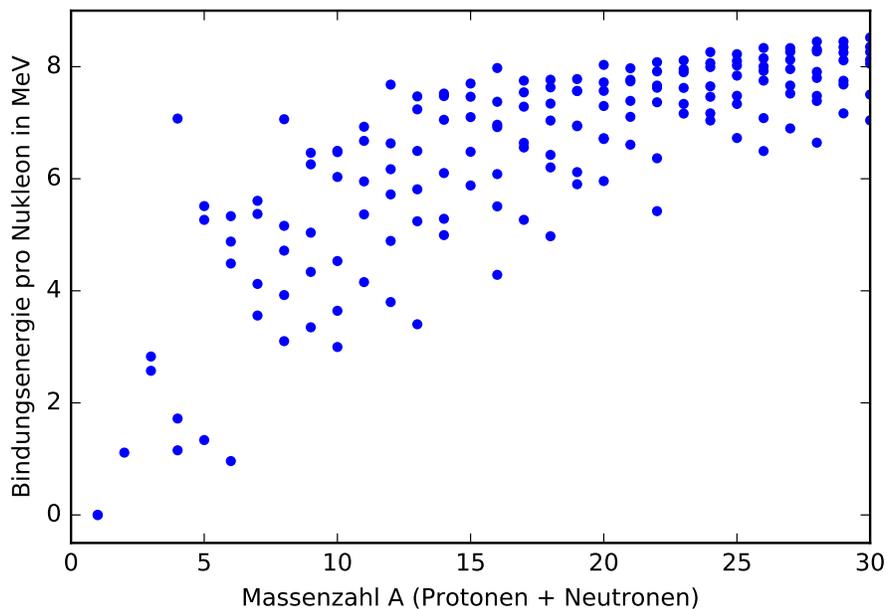
Das ist unsere Abschätzung für die Größe von Atomkernen – und sie kommt in der Tat recht gut hin.

7.4 Systematik der Bindungsenergien

An der oben gezeigten Grafik der Bindungsenergie pro Nukleon fällt auf: Zunächst steigt der Energiewert mit steigender Massenzahl deutlich an, erreicht dann ein Maximum und fällt anschließend wieder ab. Das Maximum des Betrags der Bindungsenergie pro Nukleon erreicht ^{62}Ni , Nickel-62, mit 28 Protonen und 34 Neutronen.

Die Form der Bindungsenergie-Kurve besagt, dass es für schwere Atomkerne energetisch günstig ist, zu zerfallen: Die Zerfallsprodukte sind jedes für sich stärker gebunden (größere Bindungsenergie pro Nukleon) als der Ausgangskern. Sie haben damit in der Summe eine geringere Masse als der Ausgangskern; die der Massendifferenz entsprechende Energie wird bei der Kernspaltung freigesetzt.

Uns interessiert das linke Ende des Diagramms; hier sind die Werte für die leichtesten Atomkerne gesondert dargestellt:

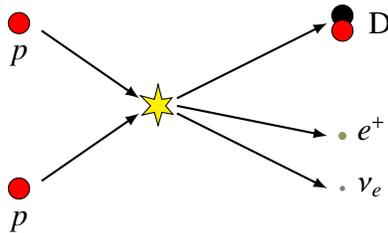


Insbesondere bei ^4He , Helium-4 mit zwei Protonen und Neutronen, springt die Bindungsenergie radikal nach oben.

Beginnen wir mit den einfachsten Bestandteilen, den Protonen. Zwei Protonen sind positiv geladen und stoßen sich daher elektrisch ab. Erst wenn sie sich mit hinreichend großer Geschwindigkeit hinreichend nahe kommen, überwiegt der

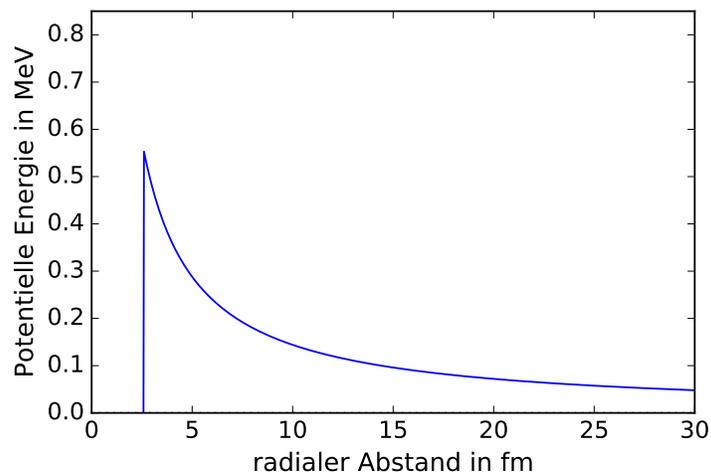
Einfluss der (kurzreichweitigen) anziehenden starken Kernkraft, und die Protonen können sich aneinander binden.

Die potenzielle Energie aufgrund der elektrostatischen Abstoßung reicht nicht aus um zu erklären, warum es kein Diproton (oder ${}^2\text{He}$, Helium-2) gibt – in der normalen Form aus der Elektrostatik, mit dem nuklearen Bohr-Radius als Abstand, ist die potenzielle Energie geringer als die Massendifferenz zwischen Neutron und Proton. Erst der Umstand, dass die Kernkraft zwischen Neutron und Proton leicht unterschiedliche Eigenschaften hat als die zwischen zwei Protonen führt dazu, dass das Diproton instabil ist und mithilfe des inversen Beta-Zerfalls (Proton wird zu Neutron plus Positron plus Elektronenneutrino) zu schwerem Wasserstoff wird (Deuterium, ${}^2\text{H} \equiv {}^2\text{D}$):



7.5 Kernfusion

Die Grundsituation bei der Kernfusion ist die folgende: Atomkerne sind positiv geladen und stoßen sich daher elektrisch ab. Hier ist das Coulomb-Potential für zwei Protonen aufgezeichnete:

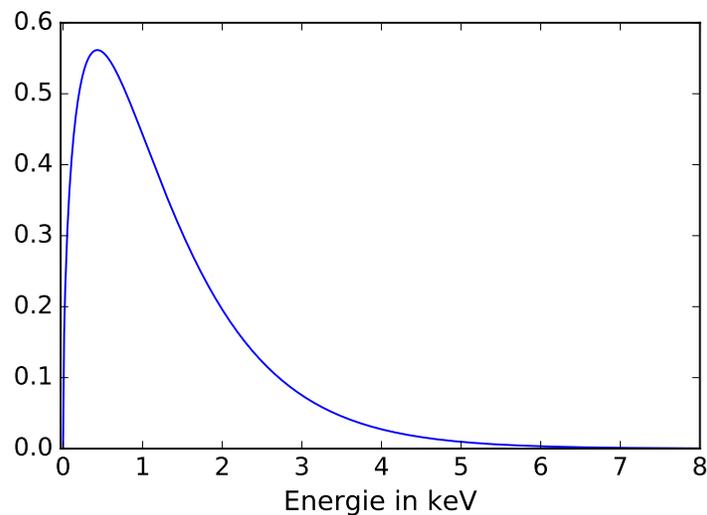


Erst wenn sich zwei Atomkerne sehr nahe kommen, auf Größenskalen von 10^{-15} m (wie wir gesehen haben), überwiegen die (sehr kurzreichweitigen, aber anziehenden) Kernkräfte (im vereinfachten Bild: der Potenzialtopf ganz links, bei Abständen bis rund 2 fm) und es kann zu einer Verschmelzung kommen.

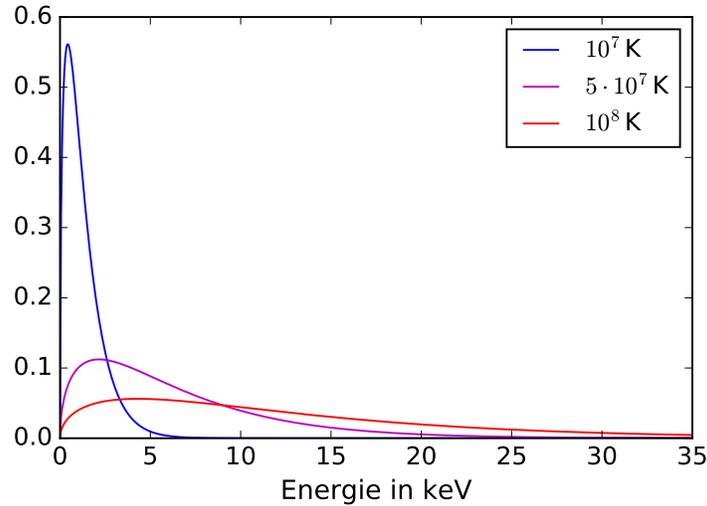
Um sich trotz Abstoßung so nahe zu kommen, ist eine gehörige Anfangsgeschwindigkeit nötig. Die Geschwindigkeit der Atomkerne folgt in guter Näherung der sogenannten Maxwell-Boltzmann-Verteilung: die Wahrscheinlichkeit $f(E)dE$, einen Atomkern im Energiebereich von E bis $E + \Delta E$ anzutreffen, ist

$$f(E) = \sqrt{\frac{E}{\pi}} (kT)^{-3/2} \cdot \exp[-E/kT], \quad (22)$$

wie sie hier für $T = 10^7$ K dargestellt ist:



Bei höheren Temperaturen wird die Verteilung immer breiter und verschiebt sich immer weiter nach rechts:



Eine genauere Rechnung zeigt trotzdem, dass nicht genügend viele Atomkerne schnell genug sind, um die Coulomb-Barriere direkt zu überwinden.

Was stattdessen passieren kann und in Sternen auch passiert, konnte George Gamow im Jahre 1928 erklären – der 1927 offenbar bereits von Friedrich Hund entdeckte Tunneleffekt, der Umstand, dass Quantenteilchen auch größere Potentialwälle überwinden können, die für klassische Teilchen undurchdringlich wären.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen mit Energie E tunnelt, hängt von den Ladungszahlen z des Teilchens und Z des Atomkerns, der Masse m des Teilchens und M des Atomkerns ab. Die sogenannte Gamow-Energie ist

$$E_g = \frac{1}{2}\mu \left[\frac{\pi Qq}{\epsilon_0 h} \right]^2 \quad (23)$$

mit

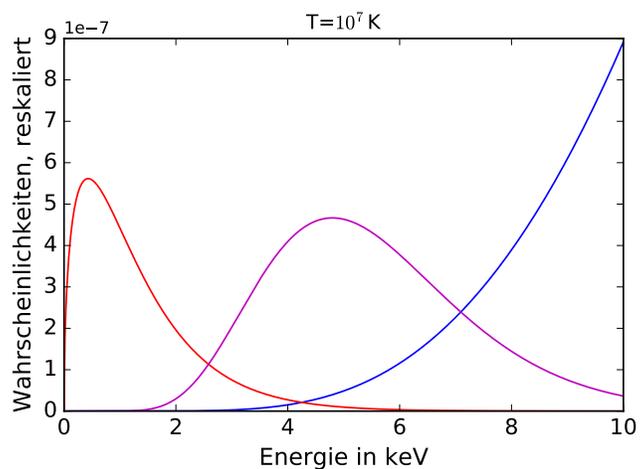
$$\mu = \frac{mM}{m + M}$$

der reduzierten Masse, und die Tunnelwahrscheinlichkeit eines Teilchens, das mit Energie E auf die Coulomb-Barriere zuläuft, ist

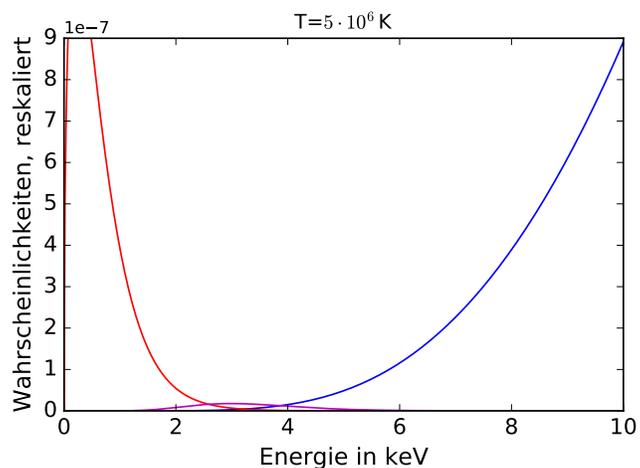
$$P(E) = \exp \left[-\sqrt{\frac{E_g}{E}} \right]. \quad (24)$$

Damit ist der Bruchteil der Teilchen, die tatsächlich tunnelt, so etwas wie das Produkt der Teilchen mit Energie E , die gemäß der Boltzmann-Verteilung (22)

überhaupt vorhanden sind, und der Tunnelwahrscheinlichkeit (24). Der Teilchenbruchteil nimmt mit zunehmender Energie exponentiell ab, die Tunnelwahrscheinlichkeit mit zu — und insgesamt ergibt sich die folgende Gesamtverteilung, auch *Gamow peak*, Gamow-Gipfel genannt, als Energiebereich, in dem Kernfusion besonders wahrscheinlich ist, hier für eine Temperatur von 10^7 K:



Die Wahrscheinlichkeit ist stark temperaturabhängig. Wenn man nur die Hälfte des Temperaturwerts nimmt, fällt die Wahrscheinlichkeit fast um einen Faktor 10:



7.6 Energieausbeute

Bei der Verschmelzung von Protonen zu einem Helium-4-Kern müssen wir zum einen die Bindungsenergie pro Nukleon einrechnen, aber andererseits gegenrechnen, dass zwei der Protonen zu (etwas schwereren) Neutronen geworden sind. Demnach wird der einfachen Abschätzung über die Bindungsenergie nach die Energie

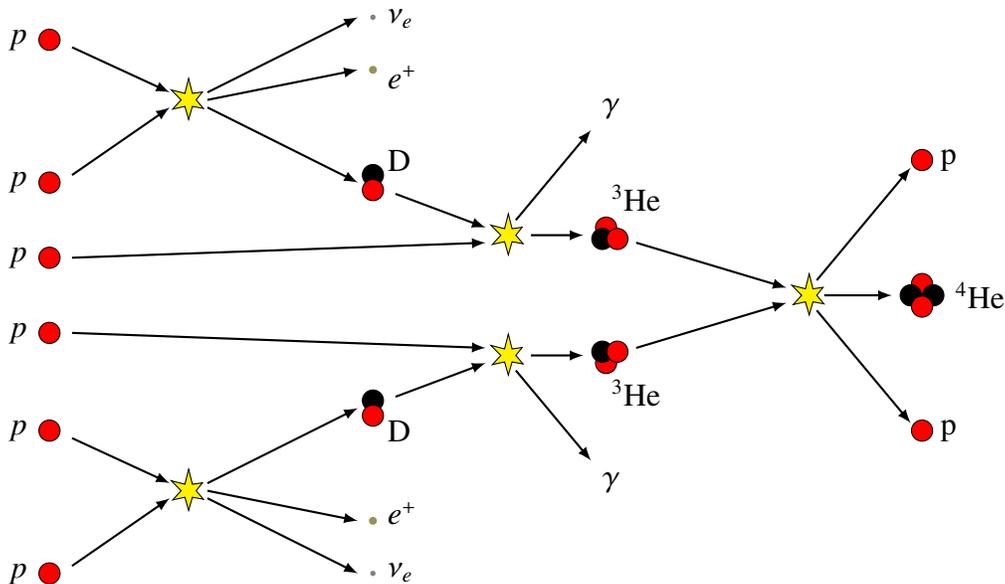
$$\Delta E = 4 \cdot 7.1 \text{ MeV} + 2 \cdot 0.51 \text{ MeV} - 2(m_n - m_p)c^2 = 26.7 \text{ MeV} \approx 0.007 \cdot (4 m_p)c^2$$

freigesetzt. Die letzte Rechnung sagt etwas über den Wirkungsgrad aus: Wir müssen eine Masse von $4 m_p$ einsetzen um eine Energie von $0.007 \cdot (4 m_p)c^2$ herauszubekommen. Der auf die Masse bezogene Wirkungsgrad dieser Reaktionen ist

$$\eta = \frac{\Delta E}{Mc^2} = 0.007. \quad (25)$$

Zum Vergleich: Für die Kernspaltung liegt der entsprechende Wirkungsgrad bei $\eta = 0.9$ Promille, für chemische Reaktionen wie Verbrennungen noch einmal deutlich niedriger!

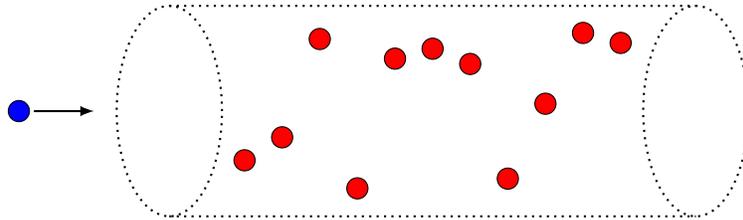
Eine der möglichen Reaktionen, die von Wasserstoff zu Helium-4 führen ist die pp-Kette, deren Verlauf hier dargestellt ist:



Sie findet vor allem in Sternen mit Massen geringer oder gleich der unserer Sonne statt. In massereicheren Sternen findet stattdessen der sogenannte CNO-Zyklus statt, auch Bethe-Weizsäcker-Zyklus genannt.

7.7 Kernfusion: Reaktionsraten

Für die Energieerzeugungsrates ist wichtig, wie oft es im Plasma z.B. im Sterninneren tatsächlich zu Kernfusions-Reaktionen kommt. Stellen wir uns als vereinfachte Situation ein Proton vor (hier blau eingezeichnet), das auf Atomkerne (rot eingezeichnet) zufliegt:



Die Rechnung ist dann wie folgt: Betrachten wir die Strecke $v \cdot \Delta t$, die unser Proton mit Geschwindigkeit v in der Zeit Δt zurücklegt. Stellen wir uns das Proton vereinfacht als punktförmiges Teilchen vor, und die Atome als starre Kugeln mit Radius R . Wir vernachlässigen dabei langreichweitige Abstoßungskräfte und betrachten die Situation zunächst als eine Art Billard. Unser Proton wird genau dann auf eine der starren Kugeln treffen, wenn die betrachtete Kugel nicht mehr als den Abstand R senkrecht zur Protonenbahn versetzt ist. Das trifft auf alle Atomkerne zu, deren Positionen sich im Zylinder mit Radius r rund um die Protonenbahn befinden. Dieser Zylinder hat das Volumen

$$V_{\text{zyl}} = v \cdot \Delta t \cdot \pi r^2 = v \cdot \Delta t \cdot \sigma, \quad (26)$$

wobei $\sigma = \pi r^2$ die Querschnittsfläche eines der Atomkerne ist. Angenommen, die Teilchenzahldichte der Atomkerne sei n_K . Dann befinden sich in dem betreffenden Zylinder

$$n_K \cdot V_{\text{zyl}} = n_K \cdot v \cdot \sigma \cdot \Delta t \quad (27)$$

Atomkerne, und genau so viele Reaktionen (Stöße an einen Atomkern) erlebt unser Proton in der gegebenen Zeit Δt . (Muss man sich dabei Gedanken darüber machen, dass das Proton beim ersten Stoß abgelenkt wird und gar nicht mehr gerade weiterfliegt? In erster Näherung nicht, denn zumindest solange das Proton beim Stoß nur seine Richtung ändert, dann gilt: wenn unsere Atomkerne gleichmäßig im Raum verteilt sind, wird das abgelenkte Proton in seiner neuen Flugrichtung genau dieselben Verhältnisse, und dieselbe Wahrscheinlichkeit für weitere Stöße vorfinden wie in seiner ursprünglichen Richtung.)

Insbesondere ist die Reaktionsrate, also die Anzahl der Reaktionen pro Zeiteinheit, für unser einzelnes Proton

$$\Gamma = n_K \cdot v \cdot \sigma. \quad (28)$$

Die Fläche σ heißt allgemein *Wirkungsquerschnitt*. Wenn wir keine Billardsituation betrachten, sondern allgemeinere Wechselwirkungen, dann lassen sich die komplizierteren Wahrscheinlichkeiten, die im allgemeinen z.B. noch von der Energie des stoßenden Teilchens abhängen werden, ebenfalls als Größe mit der Dimension einer Fläche schreiben. Auch diese allgemeinere Funktion heißt noch Wirkungsquerschnitt und wird geschrieben als $\sigma(E)$.

Wenn wir nicht mehr ein einzelnes Proton betrachten, sondern viele Protonen, mit einer Teilchenzahldichte n_p , dann können wir die Reaktionsratendichte ausrechnen, also die Anzahl der Reaktionen pro Volumeneinheit pro Zeiteinheit. Da in einem Volumen ΔV eine Anzahl $n_p \Delta V$ von Protonen ist, und jedes davon eine Reaktionsrate (28) hat, ist die Reaktionsratendichte

$$R = n_p \Gamma = n_p \cdot n_K \cdot v \cdot \sigma(E). \quad (29)$$

Im allgemeinen werden unsere Protonen natürlich nicht alle die Geschwindigkeit v haben; insbesondere nicht, wenn sie infolge der Reaktionen ihre Richtung und Geschwindigkeit ändern. Im thermischen Gleichgewicht ist die Geschwindigkeit unserer Protonen durch eine Verteilung gegeben, wie eben beispielsweise durch die Boltzmann-Verteilung (22). Um die Reaktionsratendichte hinzuschreiben, müssen wir die protonen-abhängigen Eigenschaften, nämlich Geschwindigkeit und energieabhängiger Wirkungsquerschnitt, über diese Verteilung mitteln; den Mittelwert schreiben wir als $\langle \sigma v \rangle$.

Für die verschiedenen Kernfusions-Rechnungen mit tunnelnden Teilchen ergeben sich bei entsprechender Rechnung typischerweise gemittelte Größen der Form $\langle \sigma v \rangle \approx \langle \sigma v \rangle_0 T^\nu$, mit einem von der Reaktion abhängigen Exponenten ν und reaktionsspezifischer Proportionalitätskonstante. Für einige ausgewählte Reaktionen sind die Werte für die Exponenten hier aufgelistet:

Reaktion	ν
p + p	3.9
p + ^{14}N	20
^4He + ^{12}C	42
^{16}O + ^{16}O	182

Die Reaktionsratendichte ist dann

$$R = n_p \cdot n_K \cdot \langle \sigma v \rangle. \quad (30)$$

Wir können anstatt der Teilchenzahldichten auch Massendichten verwenden, wenn wir die Massen m_p des Protons und M der beteiligten Atomkerne einsetzen: Massendichte gleich Teilchenzahldichte mal Teilchenmasse. Dann ist die Reaktionsratendichte

$$R = \frac{\rho_p}{m_p} \cdot \frac{\rho_K}{M} \cdot \langle \sigma v \rangle. \quad (31)$$

8 Energieerzeugung

Nach dieser Vorbereitung können wir wieder zu unseren Sternen zurückkehren. Im Inneren von Sternen wird Energie freigesetzt, die in Form von Strahlung in den umgebenden Raum abgegeben wird. Wir hatten oben bereits die Leuchtkraft $L(r)$ definiert, nämlich die pro Zeiteinheit durch die Kugel mit Radius r fließende Energie.

Man definiert die Energieerzeugungsrate $\varepsilon(P, T, \dots)$ die, wie hier angedeutet, vom Druck, von der Temperatur und möglicherweise noch von anderen Größen abhängt, üblicherweise über

$$\Delta L = \varepsilon \cdot \Delta m,$$

wobei Δm die Masse einer bestimmten Region innerhalb unseres Sterns ist und ΔE die Energie, welche diese Region pro Zeiteinheit freisetzt. Diese Rate hängt direkt mit unseren Überlegungen im Abschnitt 7.7 zusammen. Wir unterscheiden dabei die einzelnen Teilchenarten nicht voneinander, sondern versuchen eine Art mittlere Abschätzung. Im Mittel hat jedes Teilchen, mit dem wir es zu tun haben, die Masse μm_p ; bei einem vorwiegend aus Wasserstoff bestehenden Stern ist $\mu \approx 1$. Wir haben nicht Zielteilchen und bewegte Teilchen, sondern in unserem Stern stoßen unsere „mittleren Teilchen“ zusammen; das ergibt insgesamt eine Reaktionsratendichte

$$R = \frac{\rho^2}{(\mu m_p)^2} \cdot \langle \sigma v \rangle \quad (32)$$

Wird bei jeder dieser Reaktionen wird (im Mittel) ein Energiebetrag δE , dann wird in einem kleinen Volumen ΔV , das die Masse $\Delta m = \Delta v \cdot \rho$ enthält, pro Zeiteinheit die Energie

$$\Delta L = \delta E \frac{\rho^2}{(\mu m_p)^2} \cdot \langle \sigma v \rangle \Delta V = \delta E \frac{\rho}{(\mu m_p)^2} \cdot \langle \sigma v \rangle \Delta m \quad (33)$$

frei, und wir haben demnach

$$\varepsilon = \delta E \frac{\rho}{(\mu m_p)^2} \cdot \langle \sigma v \rangle \quad (34)$$

Zurück zur Radiusabhängigkeit der Leuchtkraft $L(r)$: Ganz analog dazu, wie wir für $M(r)$ argumentiert haben, gilt: Beim Übergang von r zu $r + \Delta r$ kommt genau jener Anteil an freigesetzter Energie hinzu, der von der Materie in der Kugelschale mit Radius r erzeugt wird und, der Definition von ε nach, proportional zur Masse dieser Kugelschale ist. Damit ist

$$\Delta L \equiv L(r + \Delta r) - L(r) = \varepsilon \cdot 4\pi r^2 \cdot \Delta r \cdot \rho(r),$$

oder, einmal mehr als infinitesimale Version für kleine Radiusunterschiede,

$$\frac{dL}{dr} = \varepsilon \cdot 4\pi r^2 \cdot \rho(r). \quad (35)$$

Das ist die dritte unserer Grundgleichungen.

9 Energietransport

Als nächstes müssen wir uns darum kümmern, was denn überhaupt dafür verantwortlich ist, dass Energie im Inneren unseres Sterns in Richtung Oberfläche transportiert werden kann, sprich: Wir müssen einen Mechanismus ausfindig machen, der erklärt, wie es denn zu dem von uns als $L(r)$ bezeichneten Energiestrom kommt.

Für diesen Energietransport gibt es mehrere Möglichkeiten: Herkömmliche Wärmeleitung beispielsweise, oder aber Strahlung, die nach außen läuft. Eine dritte Möglichkeit ist die Konvektion, also ein Prozess, bei dem Materie sich bewegt und die in sich gespeicherte Energie mitführt. Ein Alltagsbeispiel für Konvektion ist brodelndes Wasser in einem Kochtopf: Heiße Wasseranteile steigen dabei an verschiedenen Stellen nach oben, kältere sacken ab in Richtung Topfboden.

Konvektion ist recht schwierig zu beschreiben. Für die anderen beiden Mechanismen machen wir den Ansatz, dass die Menge an transportierter Energie pro Zeiteinheit zum Temperaturgefälle

$$\frac{\Delta T}{\Delta r}$$

proportional ist – je mehr sich die Temperaturen zweier Regionen unterscheiden, umso mehr Energie wird pro Zeiteinheit von einer Region in die andere transportiert. Sind alle anderen Bedingungen gleich, dann ist die transportierte Energie pro Zeiteinheit außerdem zum Inhalt der Fläche proportional, durch die der Energietransport abläuft. In unserem Falle erfolgt der Transport durch die Kugel­fläche beim Radius r . Wir kommen damit auf

$$L(r) = -4\pi r^2 \cdot \sigma(T, \rho) \cdot \frac{dT}{dr}. \quad (36)$$

Das Minuszeichen stellt sicher: Energie wird dann netto von innen nach außen transportiert, wenn die Temperatur T mit zunehmendem Radius r abnimmt, innere Schichten also heißer sind als äußere. Den Proportionalitätsfaktor nennen wir $\sigma(T)$, und er wird im allgemeinen von der Temperatur T und der Dichte ρ abhängen.

10 Strahlungsdruck

Wir hatten in einer früheren Vorlesung (welche Informationen trägt Strahlung?) bereits die Absorption von Strahlung in Materie besprochen. Die Grundsituation war die folgende: Angenommen, auf eine materiegefüllte Region fällt Strahlung mit einer Intensität I (durch eine Fläche fließende Energie pro Zeiteinheit pro Flächeneinheit). Wieviel von dieser Strahlung kommt ein Stückchen weiter hinten an?

Die Materie, durch welche sich die Strahlung fortbewegen wird, wird dabei sicher einiges an Strahlung absorbieren, andererseits auch sicher Strahlung in alle Richtungen abgeben. Das Netto-Resultat ist die *effektive Absorption* von Strahlung in jenem Bereich.

Betrachten wir insbesondere die für unsere Sternmodelle interessante radiale Richtung, und darin eine kleine Region, die in radiale Richtung von r bis $r + \Delta r$ reicht. Die Absorption ist proportional zur einfallenden Intensität: ein fester Anteil der Strahlung wird absorbiert. Wie groß dieser Anteil ist, hängt von der Materiedichte in der betreffenden Region ab. Bei vergleichsweise geringen Dichten machen wir den Ansatz, dass der absorbierte Anteil direkt proportional ist zur Materiedichte $\rho(r)$ in der betreffenden Region.

Unser Ansatz lautet dann:

$$I(r + dr) = (1 - \kappa \rho(r) dr) \cdot I(r) \quad (37)$$

mit dem Absorptionskoeffizienten κ . Das κ wird im allgemeinen von der Wellenlänge der betrachteten Strahlung abhängen – ein und dieselbe Staubwolke beispielsweise kann für sichtbares Licht undurchdringlich, für Nahinfrarotlicht dagegen so gut wie durchsichtig sein. Umgeschrieben heißt das

$$dI = -\kappa \rho(r) I(r) dr. \quad (38)$$

Nun haben Lichtteilchen aber, wie wir gesehen haben, immer auch einen Impuls p , der mit ihrer Energie E über die relativistische Beziehung $E = pc$ zusammenhängt. Pro Zeiteinheit und Flächeneinheit wird daher durch unser Materiestück ein Impuls

$$-\frac{\kappa}{c} \rho(r) I(r) dr$$

transportiert. Die Größe „Impuls pro Zeiteinheit“ ist eine Kraft, und diese Größe dann auch noch pro Flächeneinheit betrachtet ist per Definition der Druck, der auf die betrachtete Fläche wirkt. Aufgrund der Wechselwirkung von Strahlung und Materie erfährt unser Stern demnach einen Strahlungsdruckzuwachs

$$dP_{rad} = -\frac{\kappa}{c} \rho(r) I(r) dr, \quad (39)$$

oder, umgeschrieben,

$$I = -\frac{c}{\kappa \rho(r)} \cdot \frac{dP_{rad}}{dr}. \quad (40)$$

Wir haben in den vorangehenden Rechnungen nicht die Intensität $I(r)$, sondern die Leuchtkraft $L(r)$ benutzt. Mit der üblichen Gleichung für den Flächeninhalt einer Kugeloberfläche hängen diese beiden zusammen als

$$L(r) = 4\pi r^2 I(r), \quad (41)$$

und die Gleichung wird zu

$$L(r) = -4\pi r^2 \frac{c}{\kappa \rho(r)} \cdot \frac{dP_{rad}}{dr}. \quad (42)$$

Den Strahlungsdruck können wir aber direkt in Abhängigkeit von der Temperatur angeben. Nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz ist die Energiedichte von Wärmestrahlung

$$u = \frac{4\sigma_{SB}}{c} T^4, \quad (43)$$

mit der Stefan-Boltzmann-Konstante

$$\sigma_{SB} = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}. \quad (44)$$

Der zugehörige Strahlungsdruck ist²

$$P_{rad} = \frac{u}{3} = \frac{4\sigma}{3c} T^4. \quad (45)$$

Damit ist

$$\frac{dP_{rad}}{dr} = \frac{16\sigma}{3c} T^3 \cdot \frac{dT}{dr}. \quad (46)$$

und wir können die Gleichung (42) umschreiben zu

$$L(r) = -\frac{64\pi\sigma}{3} \frac{r^2}{\kappa\rho(r)} T^3 \cdot \frac{dT}{dr} \quad (47)$$

bzw. als Gleichung für die r -Abhängigkeit der Temperatur,

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{64\pi\sigma} \cdot \frac{\kappa\rho(r)}{r^2} \cdot \frac{L(r)}{T^3}. \quad (48)$$

11 Vier Grundgleichungen

Damit haben wir insgesamt vier Grundgleichungen für den Sternaufbau, nämlich die Gleichungen (1), (2), (35) und (48), hier noch einmal gemeinsam aufgeführt:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(P, T)}{r^2} \quad (1)$$

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \cdot \rho(P, T) \quad (2)$$

$$\frac{dL}{dr} = \varepsilon(P, T) \cdot 4\pi r^2 \cdot \rho(P, T) \quad (35)$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{64\pi\sigma} \cdot \frac{\kappa(P, T)\rho(P, T)}{r^2} \cdot \frac{L(r)}{T^3}. \quad (48)$$

²Das ergibt ein entsprechendes Integral über alle Richtungen; Plausibilitätsüberlegung für den Faktor 1/3: Bei Reflektion an einer Fläche wird nur Impuls in der Richtung senkrecht zur Fläche übertragen; die ist aber nur eine von drei unabhängigen Richtungen im Raum.

Offenbar sind diese Gleichungen nur vollständig definiert, wenn wir zusätzlich noch Gleichungen oder Ausdrücke für die *Materialfunktionen* $\rho, \kappa, \varepsilon$ angeben. Für ρ ist die einfachste Möglichkeit die schon genannte der Zustandsgleichung eines idealen Gases, Gleichung (4)

$$\rho(P, T, \mu) = \frac{\mu m_p}{k} \cdot \frac{P}{T}. \quad (49)$$

Für die Energieerzeugung pro Masseneinheit hatten wir in (34) gesehen, dass sie für eine bestimmte Reaktion näherungsweise gegeben ist durch

$$\varepsilon(\rho, T) = \varepsilon_S \cdot \frac{\rho}{\mu} \cdot T^\nu, \quad (50)$$

für einen geeigneten Koeffizienten ν und Proportionalitätsfaktor ε_S .

12 Homologie-Relationen

Anstatt die Differentialgleichungen für den Sternaufbau komplett zu lösen, kann man diese Gleichungen auch benutzen, um unterschiedliche Lösungen – das entspricht unterschiedlichen Sternen! – zueinander in Bezug zu setzen. Daraus lassen sich für Sterne, die zu ein und derselben „Ähnlichkeitsklasse“ gehören, Relationen zwischen den grundlegenden Größen L, M, R und T ableiten. Wir haben bereits in der Vorlesung gesehen, dass die Hauptreihensterne eine solche Ähnlichkeitsklasse bilden, und dass derartige Relationen einiges von dem erklären können, was wir rein phänomenologisch in unseren Sterndiagrammen bemerkt hatten!

In der Vorlesung hatte ich das in vereinfachter Form getan, nämlich Größen und ihre Ableitungen jeweils durch die Mittelwerte ersetzt und dann die Gleichungen für die Mittelwerte verglichen. Man kann die Argumentation aber auch stringenter durchführen, indem man relative Werteverteilungen für die genannten Größen betrachtet. Darum wird es in den folgenden Abschnitten gehen.

12.1 Relativer Radius

Dafür führen wir den relativen Radius ξ ein, definiert als

$$\xi = \frac{r}{R}. \quad (51)$$

Beispielsweise ist $\xi = 0.5$ der Abstand auf halbem Wege zwischen Sternzentrum und Sternoberfläche.

12.2 Homologe Sterne: Definition

Wir betrachten jetzt sogenannte *homologe Sterne*, definiert als Sterne, deren Massenverteilung den gleichen Gesetzmäßigkeiten folgt; hat der erste dieser Sterne die Massenverteilung $M_1(r)$, ausgedrückt als $M_1(\xi)$, und der zweite die Massenverteilung $M_2(\xi)$ dann soll gelten, dass

$$\frac{M_1(\xi)}{M_1} = \frac{M_2(\xi)}{M_2}, \quad (52)$$

mit M_1 und M_2 den Gesamtmassen der beiden Sterne. Auch der relative Radius ξ ist dabei natürlich sternspezifisch definiert, $r = \xi R_1$ für den ersten Stern und $r = \xi R_2$ für den zweiten.

Was das für die Massenverteilung bedeutet, macht man sich am einfachsten an Zahlenbeispielen klar. Befinden sich beispielsweise beim Stern 1 ganze 75% der Masse bei Radiuswerten kleiner als $0.5 R_1$ (mit R_1 dem Radius der Sternoberfläche), anders gesagt

$$\frac{M_1(\xi = 0.5)}{M_1} = 0.75,$$

dann gilt eine analoge Aussage auch für den Stern 2, nämlich

$$\frac{M_2(\xi = 0.5)}{M_2} = 0.75.$$

Allgemeiner: Jede Aussage über Massenbruchteile, die sich innerhalb einer Kugelschale mit gegebenem ξ -Wert befinden, gilt für beide Sterne gleichermaßen.

Noch einmal anders ausgedrückt: Die Massenverteilung jedes dieser Sterne wird durch dieselbe universelle Funktion $\mathcal{M}(\xi)$ beschrieben:

$$M_1(\xi) = M_1 \cdot \mathcal{M}(\xi)$$

und

$$M_2(\xi) = M_2 \cdot \mathcal{M}(\xi).$$

12.3 Dichten homologer Sterne

In die Grundgleichung (2) eingesetzt, jetzt wieder mit der radiusabhängigen Dichte, ergibt das

$$\frac{dM}{dr} = \frac{M_1}{R_1} \frac{d\mathcal{M}(\xi)}{d\xi} = 4\pi R_1^2 \xi^2 \cdot \rho_1(\xi) \quad (53)$$

Damit ist auch die Dichte jedes der homologen Sterne in der gleichen Weise von ξ abhängig, und zwar gibt es eine universelle Funktion $\varrho(\xi)$, aus der sich die Dichte ermitteln lässt als

$$\rho_1(\xi) = \bar{\rho}_1 \cdot \varrho(\xi) \quad (54)$$

mit

$$\bar{\rho}_1 = M_1 / (4/3 \cdot \pi R_1^3), \quad (55)$$

einer Größe, die eine direkte Deutung hat: der mittleren Dichte von Stern 1. Die universelle Funktion genügt der Gleichung

$$\varrho(\xi) = \frac{1}{3 \xi^2} \cdot \frac{dM(\xi)}{d\xi}. \quad (56)$$

12.4 Druck homologer Sterne

In der gleichen Weise gehen wir an die anderen Gleichungen heran. Die Gegendruck-Gleichung (1) lässt sich für Stern 1 umschreiben zu

$$\frac{1}{R_1} \frac{dP_1}{d\xi} = - \frac{GM_1 \cdot M(\xi) \cdot \bar{\rho}_1 \cdot \varrho(\xi)}{R_1^2 \cdot \xi^2} \quad (57)$$

bzw. nach geeignetem Umschreiben

$$\frac{d}{d\xi} \left[P_1(\xi) \cdot \frac{R_1}{\bar{\rho}_1 M_1} \right] = - \frac{G M(\xi) \cdot \varrho(\xi)}{\xi^2}. \quad (58)$$

Auf der rechten Seite stehen nur universelle Funktionen, die nicht von den Kenngrößen $R_1, M_1, \bar{\rho}_1$ des Sterns 1 abhängen. Folglich muss auch die linke Seite von diesen Größen unabhängig sein, mit anderen Worten: auch der Druck $P(\xi)$ lässt sich mithilfe einer universellen Funktion $\mathcal{P}(\xi)$ schreiben, nämlich als

$$P_1(\xi) = \frac{\bar{\rho}_1 M_1}{R_1} \cdot \mathcal{P}(\xi). \quad (59)$$

Für den Radiuswert $\xi = 0$ steht links gerade der Zentraldruck P_{c1} von Stern 1, umgeschrieben

$$\frac{P_{c1} R_1}{\bar{\rho}_1 M_1} = \mathcal{P}(0). \quad (60)$$

Dieselbe Gleichung können wir für einen beliebigen Stern 2 hinschreiben, und der Wert $\mathcal{P}(0)$ ist auf der rechten Seite derselbe wie bei Stern 1. Daraus aber folgt

$$\frac{P_{c1} R_1}{\bar{\rho}_1 M_1} = \frac{P_{c2} R_2}{\bar{\rho}_2 M_2} \equiv \alpha_H, \quad (61)$$

wobei α_H eine für unsere spezifische Serie homologer Sterne charakteristische Konstante ist. Wir haben über die Homologie eine Beziehung für Zentraldruck, Radius, Masse und mittlere Dichte zweier zueinander homologer Sterne abgeleitet!

12.5 Temperatur homologer Sterne

Mit dieser Information gehen wir jetzt zu unserer Zustandsgleichung, der idealen Gasgleichung (4), die wir für Stern 1 schreiben können als

$$\bar{\rho}_1 \cdot \varrho(\xi) = \frac{\mu_1 m_p}{k} \cdot \frac{\bar{\rho}_1 M_1}{R_1} \cdot \frac{\mathcal{P}(\xi)}{T_1(\xi)}. \quad (62)$$

Sie kennen den Drill inzwischen: wir sortieren so um, dass auf der rechten Seite nur noch universelle Größen stehen, in unserem Falle

$$T_1(\xi) \frac{R_1}{\mu_1 M_1} = \frac{m_p}{k} \cdot \frac{\mathcal{P}(\xi)}{\varrho(\xi)}. \quad (63)$$

Da die rechte Seite universell ist, muss auch die linke Seite eine universelle Funktion $\mathcal{T}(\xi)$ sein, und der Temperaturverlauf von Stern 1 ist gegeben durch

$$T_1(\xi) = \frac{\mu_1 M_1}{R_1} \cdot \mathcal{T}(\xi). \quad (64)$$

Wieder folgt aus dieser Gleichung eine Beziehung für die Zentraltemperaturen zueinander homologer Sterne, wenn wir $\xi = 0$ einsetzen. Noch interessanter ist, dass für $\xi = 1$ (realistischer: für einen festen Wert $\xi = \xi_{ob}$ nahe 1) auch eine Beziehung für die Oberflächentemperaturen T_{eff} , also der Temperatur jener Schichten folgt, von denen aus die Strahlung freigesetzt wird, die wir beobachten. Für homologe Sterne 1, 2 gilt dann

$$\frac{T_{eff,1} R_1}{\mu_1 M_1} = \frac{T_{eff,2} R_2}{\mu_2 M_2} \equiv \beta_H, \quad (65)$$

wobei β_H eine weitere für unsere spezifische Serie homologer Sterne charakteristische Konstante ist. Hinter der Proportionalität verbirgt sich ein alter Bekannter, denn umgeschrieben ergibt sich

$$T \sim M/R. \quad (66)$$

Links steht bis auf einen konstanten Faktor die thermische Energie, also die mittlere Bewegungsenergie der Gasteilchen. Rechts steht bis auf einen Faktor (in dem die Gravitationskonstante G vorkommt) die mittlere potenzielle Energie der Gasteilchen. Dieselbe Proportionalität folgte in Teil I (im Abschnitt über die Punktteilchen-Modelle) aus dem Virialsatz.

12.6 Leuchtkraft homologer Sterne

Weiter im Text: Die Leuchtkraftgleichung (35) lässt sich für Stern 1 schreiben als

$$\frac{1}{R_1} \frac{dL_1(\xi)}{d\xi} = \varepsilon(\xi) \cdot 4\pi R_1^2 \xi^2 \cdot \bar{\rho}_1 \cdot \varrho(\xi) = \varepsilon_S \cdot (\bar{\rho}_1)^2 \frac{\varrho(\xi)^2}{\mu_1} 4\pi R_1^2 \xi^2 \left(\frac{\mu_1 M_1}{R_1}\right)^\nu \mathcal{T}(\xi)^\nu, \quad (67)$$

wobei wir im zweiten Schritt den Ansatz (50) eingesetzt haben. Einmal mehr bringen wir alle von den Sterneigenschaften des Sterns 1 abhängigen Größen auf die linke Seite, und erhalten

$$\frac{d}{d\xi} \left[\frac{R_1^{\nu-3}}{(\bar{\rho}_1)^2 \mu_1^{\nu-1} M_1^\nu} \cdot L_1(\xi) \right] = 4\pi \varepsilon_S \varrho(\xi)^2 \xi^2 \mathcal{T}(\xi)^\nu. \quad (68)$$

Wieder gilt: Da die rechte Seite nicht von den Eigenschaften von Stern 1 abhängt, darf es auch die linke nicht. Offenbar ist die Leuchtkraft ebenfalls durch eine universelle Funktion $\mathcal{L}(\xi)$ ausdrückbar, so dass

$$L_1(\xi) = \left[(\bar{\rho}_1)^2 \mu_1^{\nu-1} M_1^\nu R_1^{3-\nu} \right] \cdot \mathcal{L}(\xi) \quad (69)$$

gilt. Auch aus dieser Beziehung können wir eine Relation zwischen den Größen zweier zueinander homologer Sterne ableiten; mit $L_1(\xi = 1) = L_1$ der Gesamtleuchtkraft, und einer analogen Gleichung für Stern 2, gilt

$$\frac{L_1 R_1^{\nu-3}}{(\bar{\rho}_1)^2 \mu_1^{\nu-1} M_1^\nu} = \frac{L_2 R_2^{\nu-3}}{(\bar{\rho}_2)^2 \mu_2^{\nu-1} M_2^\nu} \equiv \gamma_H, \quad (70)$$

mit γ_H einer weiteren für diese spezifische Serie homologer Sterne charakteristische Konstante.

12.7 Folgerungen aus der Energietransport-Gleichung

Als letztes schreiben wir die Energietransport-Gleichung (48) um. Ich schreibe dabei die Leuchtkraft als

$$L_1(\xi) = L_1 \cdot \mathcal{L}(\xi) / \mathcal{L}(1) \quad (71)$$

und benutze absichtlich nicht den komplizierteren Ausdruck (69). Wir nehmen dabei als Vereinfachung näherungsweise an, dass κ eine Konstante ist. Dann gilt

$$\frac{1}{R_1} \frac{d[\mu_1 M_1 / R_1 \cdot \mathcal{T}(\xi)]}{d\xi} = -\frac{3\kappa}{64\pi\sigma} \cdot \frac{\bar{\rho}_1 \varrho(\xi)}{R_1^2 \xi^2} \cdot \frac{L_1 \cdot \mathcal{L}(\xi)}{[\mu_1 M_1 / R_1 \cdot \mathcal{T}(\xi)]^3}. \quad (72)$$

Einmal mehr bringen wir alle Größen, die von den Eigenschaften des Sterns 1 abhängen, auf die eine Seite der Gleichung, alle universellen Größen auf die andere. Das Ergebnis ist

$$\frac{\bar{\rho}_1 L_1 R_1^3}{(\mu_1 M_1)^4} = -\frac{64 \pi \sigma}{3 \kappa} \cdot \frac{\xi^2 \mathcal{T}(\xi)^3}{\varrho(\xi) \mathcal{L}(\xi)} \frac{d\mathcal{T}(\xi)}{dxi}. \quad (73)$$

Und einmal mehr folgt aus dem Umstand, dass die rechte Seite nicht von den Eigenschaften des Sterns 1 abhängt, dass es auch die linke Seite nicht tun kann. Für homologe Sterne gilt demnach

$$\frac{\bar{\rho}_1 L_1 R_1^3}{(\mu_1 M_1)^4} = \frac{\bar{\rho}_2 L_2 R_2^3}{(\mu_2 M_2)^4} \equiv \delta_H, \quad (74)$$

mit δ_H der letzten hier eingeführten, für unsere Serie homologer Sterne charakteristischen Konstante.

12.8 Allgemeine Relationen für homologe Sterne

Die Homologie-Relationen (61), (65), (70) und (74) lassen sich in folgender nützlicher Weise umschreiben. Aus (74) und der Gleichung (55) für die mittlere Dichte folgt

$$L_1 = \left(\frac{4}{3} \pi \delta_H \right) \cdot \mu_1^4 \cdot M_1^3. \quad (75)$$

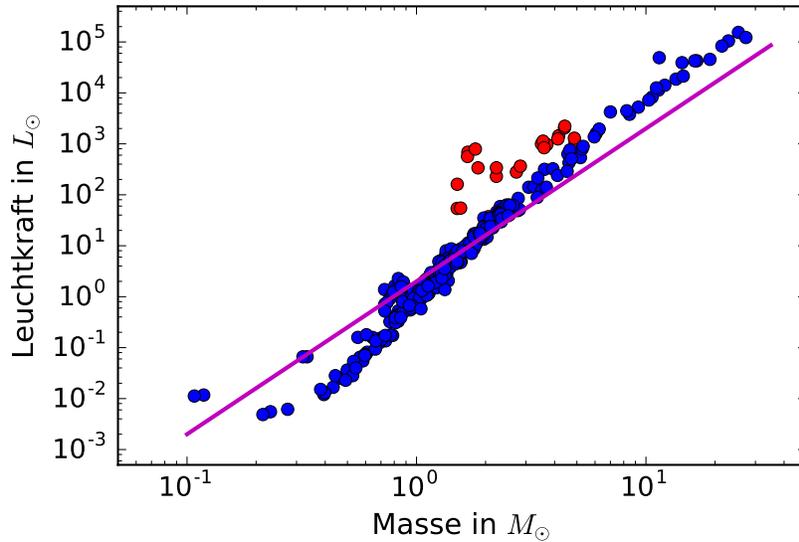
Das gilt für alle Sterne, nicht nur für Stern 1, und zwar mit derselben Proportionalitätskonstante. Wir schreiben daher allgemein für unsere homologen Sterne

$$L \sim \mu^4 \cdot M^3. \quad (76)$$

Wenn wir annehmen, dass unsere homologen Sterne außerdem dieselbe chemische Zusammensetzung haben, also jeweils den gleichen Wert für μ , gilt sogar noch allgemeiner

$$L \sim M^3. \quad (77)$$

Wir können diese Relation anhand unseres Satzes von Doppelsternen testen, für die wir sowohl Massen als auch Leuchtkräfte kennen. Hier ist in lila eine Kurve mit $L \sim M^3$ im entsprechenden Diagramm platziert:



Das ist kein perfekter Fit, aber gibt einigermaßen gut wieder, wie die – in Wirklichkeit im Detail eher leicht S-förmige Kurve – verläuft. Der gerade Teil der Kurve verläuft eher wie $L \sim M^4$.

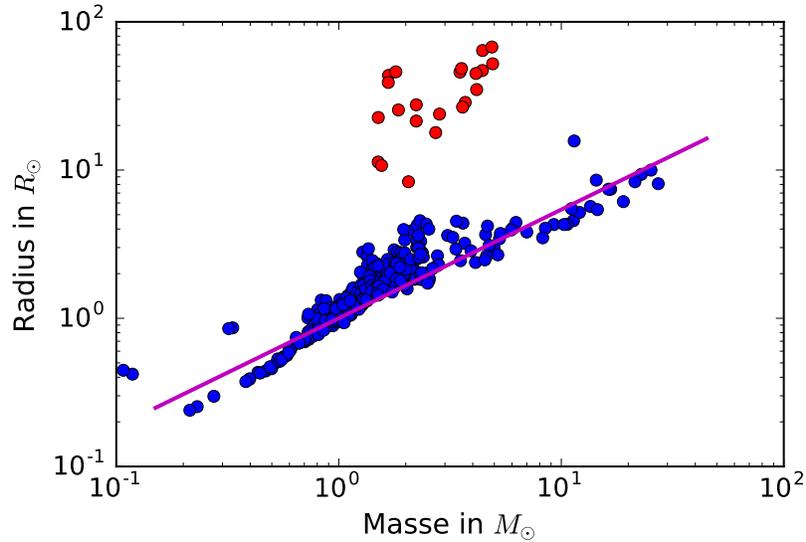
Analog dazu können wir aus (76) und (74) die Relation

$$R \sim M^{\frac{\nu-1}{\nu+3}} \cdot \mu^{\frac{\nu-4}{\nu+3}}. \quad (78)$$

Für die oben angegebenen Werte von ν ist klar, dass der Exponent von M zwischen 0.4 und 1 liegen wird, der von μ zwischen 0 und 1. Nehmen wir einmal mehr vereinfachend an, dass unsere homologen Sterne jeweils dieselbe Zusammensetzung und damit denselben Wert für μ haben. Für solche Sterne ist

$$R \sim M^{\frac{\nu-1}{\nu+3}}. \quad (79)$$

Wir vergleichen dieses Ergebnis wieder mit unseren Doppelstern-Daten. Das Abknicken der Kurve kann unser einfaches Modell nicht repräsentieren, aber der Exponent liegt in der Tat in dem vorhergesagten Bereich; hier ist die Kurve für $\nu = 12$ eingezeichnet:



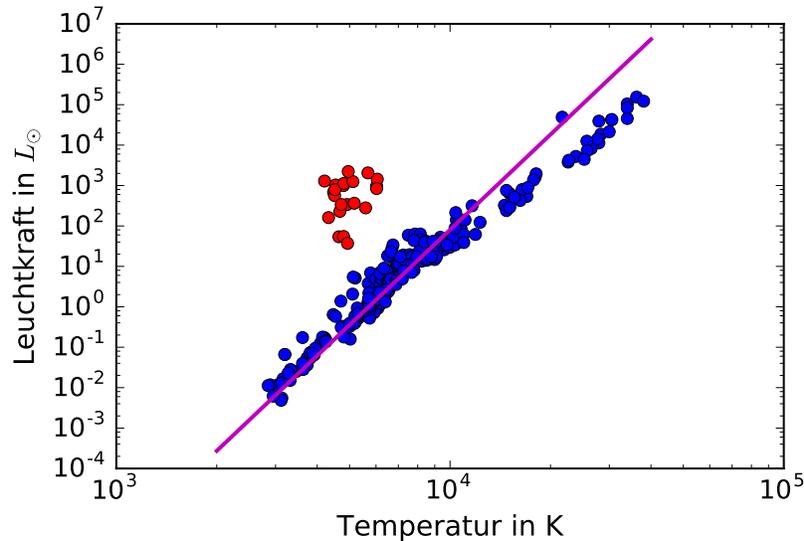
Es gibt eine weitere interessante Kombination. Aus der Masse-Leuchtkraft-Beziehung mit geeigneter Proportionalitätskonstante auch für die Effektivtemperatur T_{eff} gilt. Für die Effektivtemperatur haben wir aber noch einen weiteren Zusammenhang: Der Stern strahlt als schwarzer Körper, und damit ist

$$L \sim R^2 \cdot T_{\text{eff}}^4. \quad (80)$$

Wir nehmen außerdem die Masse-Leuchtkraft-Beziehung (77) her, ersetzen die Masse durch den Radius via (79), nehmen die m -te Potenz der resultierenden Gleichung und multiplizieren das Ergebnis mit (80). Durch geeignete Wahl von m können wir das Ergebnis so umformen, dass R nicht mehr darin vorkommt ($R^0 = 1$) und erhalten als Beziehung zwischen Leuchtkraft und effektiver Temperatur

$$L \sim T_{\text{eff}}^{\frac{12(\nu+3)}{\nu+11}}. \quad (81)$$

Für ν zwischen 4 und sehr großen Werten variiert der Exponent zwischen 5.6 und 12. Auch diesen Zusammenhang können wir wieder mit unseren Doppelstern-Daten vergleichen; hier das entsprechende Hertzsprung-Russell-Diagramm, das die Leuchtkraft gegen die Temperatur aufträgt, hier mit dem gleichen Wert $\nu = 12$ wie im letzten Diagramm:



13 Zeitskalen

Aus dem Wirkungsgrad (25) der Kernfusion kann man die Zeit abschätzen, die ein Stern mit einer Sonnenmasse überhaupt so hell strahlen kann wie die Sonne. Unter der (vereinfachten) Annahme, dass der Stern ursprünglich ganz aus Wasserstoff besteht, kommen wir auf

$$\tau = 0.007 \frac{M_{\odot} c^2}{L_{\odot}} = 3 \cdot 10^{18} \text{ s} = 10^{11} \text{ a.} \tag{82}$$

Die tatsächliche Zeit ist rund 10 Mal kleiner; sie beträgt rund 10^{10} Jahre, 10 Milliarden Jahre. Tatsächlich strahlt der Stern gegen Ende seines Lebens deutlich stärker als zur jetzigen Zeit.

Von solchen Entwicklungseffekten abgesehen kommt in dem Ausdruck sowohl die Leuchtkraft als auch die Masse vor; wir haben in (77) gesehen, dass diese für homologe Sterne über $L \sim M^3$ verknüpft sind.

Setzen wir diese Beziehung ein, dann erhalten wir

$$\tau = \tau_{\odot} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-2}. \tag{83}$$

Realistischer, das hatten wir im Vergleich mit unseren Doppelsternen gesehen, ist die Massenabhängigkeit der Leuchtkraft sogar noch stärker, nämlich ungefähr

$L \sim M^4$. Dann skalieren die Lebensdauern sogar wie

$$\tau = \tau_{\odot} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-3} . \quad (84)$$

Ein Stern, der 10 Mal mehr Masse besitzt wie die Sonne, hat demnach eine Lebensdauer von nur einem Tausendstel der Lebensdauer der Sonne: nur rund 10 Millionen Jahre statt 10 Milliarden Jahren. Der massereichste Stern unter unseren Doppelsternen hatte eine Masse von rund 30 Mal der Sonnenmasse. Seine Lebensdauer beträgt dementsprechend nur rund 400 000 Jahre – astronomisch gesehen ein bloßer Augenblick!

Hier ist, entsprechend der Formel (84) umgerechnet, ein Histogramm der Gesamt-Lebensdauern unserer Doppelsterne:

