Geometrische Grundlagen zu „Einsteins Astrophysik für Nichtphysiker“

Markus Pössel

Oktober 2015

Angesichts der Vielfalt der Hintergründe und des Vorwissens unter den Hörern von „Einsteins Astrophysik für Nichtphysiker“ — und nach den Erfahrungen des letzten Jahres — möchte ich zur Vorlesung an geeigneten Stellen Ergänzungen anbieten: Nicht allzu lange Texte, die vor der Vorlesung durchgearbeitet werden sollten und (hoffentlich!) sicherstellen, dass der Hörer bzw. die Hörerin die in der Vorlesung gebrauchten mathematischen Grundwerkzeuge auch verstehen.

Für mich sind Ausflüge zu den Grundlagen der Mathematik so, als wenn ich ein Buch erneut zur Hand nehme, das ich zuletzt vor vielen Jahren als Kind gelesen hatte. Man sieht die Dinge aus einer anderen Perspektive, hat Assoziationen, die man früher gar nicht gehabt hatte, und merkt erst, an welche Formeln und Beziehungen man sich längst so gewöhnt hat, dass man sie gar nicht mehr hinterfragt. Es würde mich freuen, wenn Sie die folgenden Seiten in diesem Geiste lesen, alten Bekannten freundlich zunicken, einiges vielleicht doch noch auffrischen.

Wie weit geht man zurück? Wie weit unten fängt man an? Das ist keine einfache Frage und hängt sehr vom wissenschaftlichen Temperament ab. Wir könnten zu den reellen, vermutlich sogar zu den natürlichen Zahlen zurückgehen und dort offene Fragen finden. Wem das liegt, der wird Mathematiker, vielleicht sogar Zahlentheoretiker.

Wir machen es stattdessen wie die Physiker: Für uns ist Mathematik ein hübsches und interessantes Werkzeug. Exakte Beweise liefere ich nur da, wo es nicht zu aufwändig wird. Dort, wo sich etwas aus der Anschaulichkeit heraus verstehen lässt, werde ich meist nicht nachbohren bzw. beweisen.

Wer auf Euklids Spuren die Beweise nachvollziehen möchte, sei hier auf die schöne interaktive Version von David Joye (Clark University verwiesen. Viel von dem, was hier besprochen wird, lässt sich - auch z.B. am Tablet - mit Geogebra virtuell und interaktiv nachbauen. Ansonsten gibt es an schönen Büchern den Klassiker von Hilbert zur modernen Axiomatisierung der Geometrie (*Grundlagen der Geometrie*, 1899; zahlreiche Neuausgaben).

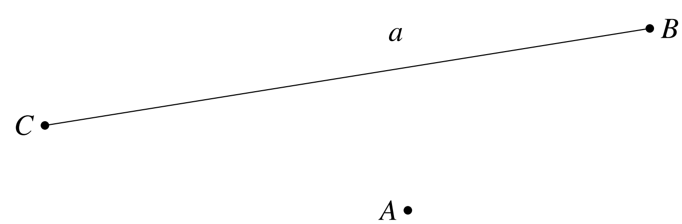
1 Punkte, Geraden, Abstände

Fangen wir mit den einfachsten Objekten an. Das sind schlicht die Punkte, die wir auf eine Ebene setzen können – einen Ausschnitt von der Ebene lässt sich auf einem Blatt Papier wie diesem hier abbilden. Punkte sind per Definition unendlich klein und haben damit nur einen einzigen Ort. In Abbildungen wären die Punkte damit natürlich unsichtbar; insofern ist sinnvoll, dass Punkte auf Abbildungen durch (kleine, gefüllte) Kreise repräsentiert werden wie hier die Punkte A, B und C:

Nur dort, wo es wichtig wird, müssen wir uns daran erinnern, dass diese Kreisscheibchen eigentlich unendlich kleine Gebilde sind.

Kommen wir zu Geraden, Strecken, Abständen — etwas detaillierter hatte ich vor einigen Jahren in dem Blogbeitrag Einstein verstehen Teil I etwas dazu geschrieben; hier fasse ich mich kurz: Je zwei Punkte können wir mit einer Gerade verbinden; was es heißt, dass ein Punkt auf solcher Gerade zwischen zwei anderen liege, möge sich bestimmen lassen; die Länge zweier Geradenabschnitte sollen sich vergleichen lassen (Abschnitte mit gleicher Länge heißen „kongruent“).

Mathematiker benötigen dazu ein System von Axiomen; für uns soll die Alltagserfahrung ausreichen, mithilfe von Linealen und geraden Kanten gerade Verbindung zwischen gegebenen Punkten zu zeichnen. Entlang solch eines Geradenabschnitts kann ich mein Lineal anlegen und in der üblichen Weise — nämlich durch den Vergleich mit der Lineal-Gesamtlänge bzw. deren regelmäßigen Unterteilungen — die Länge der Strecke bestimmen. Im folgenden Bild habe ich das für die Strecke zwischen Punkt B und Punkt C gemacht, die in der folgenden Skizze a genannt wird:

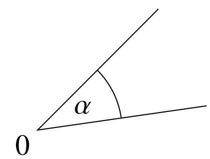


Die mathematische Kurzschreibweise für den Abstand der Punkte B und C lautet $\overline{BC}$, in unserem Falle also $a = \overline{BC}$. Die Strecke selbst wird BC geschrieben. Verlängere ich die Strecke an beiden Enden unendlich weit in dieselbe Richtung, erhalte ich die per Definition unendlich lange Gerade durch B und C. Entsprechend ist die Strecke BC nur ein (kleiner!) Abschnitt dieser Geraden. Soweit, so elementar.

2 Winkel

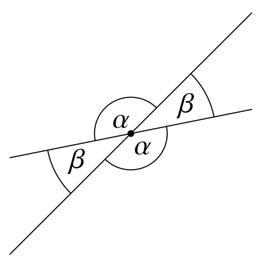
Wo immer sich Geraden oder Strecken schneiden, lässt sich angeben, wie sich ihre Richtungen zueinander verhalten: Gehen beide in dieselbe Richtung (parallel), nahezu, oder stehen sie senkrecht aufeinander? In diesem Kontext werden erstmals *Winkel* eingeführt. (In fortgeschrittenem Kontext kann man dann auch Winkel zwischen beliebigen Kurven einführen; „zoomt“ man hinreichend dicht an die Schnittstelle heran, lassen sich jene Kurven nahe der Schnittstellen gut durch Geradenabschnitte annähern.)

Im Hilbert'schen Axiomensystem sind die Winkel durch die zwei Halbstrahlen definiert, die sie begrenzen, sprich: Vom Nullpunkt 0 gehen zwei Linien ins Unendliche, und diese beiden Linien definieren den zwischen ihnen liegenden Winkel. Wir verwenden die übliche Notation, die einen Kreisbogenabschnitt zwischen die beiden Linien zeichnet und dahinein oder davor das Symbol setzt, zumeist einen griechischen Buchstaben, hier α, welches den Winkel bezeichnet:



Dass es Sinn ergibt, Winkel zu vergleichen und davon zu reden, ein Winkel sei gleich (unter Mathematikern: „kongruent zu“) einem zweiten oder eben nicht, wird wiederum durch Axiome geregelt.

Betrachtet man statt zweier Halbstrahlen zwei sich schneidende Geraden, hat man es sogar mit vier Winkeln zu tun, von denen jeweils zwei gleich sind, wie die folgende Skizze anzeigt. In der nachfolgenden Skizze heißen die beiden Winkel α und β. Als Winkel, unter dem sich die beiden Geraden schneiden, gibt man meist den kleineren dieser beiden Winkel an, in dem unten gezeichneten Falle wäre das β.

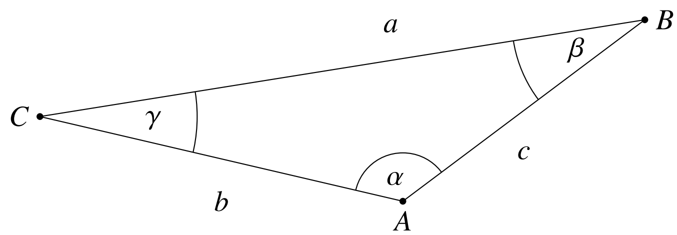


Sind die beiden Winkel gleich, $\alpha = \beta$, dann stehen die beiden Linien per Definition senkrecht aufeinander, und der entsprechende Winkel heißt rechter Winkel. Über Verfahren, Winkel zu addieren oder auch zu halbieren kann man Winkel auch quantitativ zueinander in Beziehung setzen.

In der bei uns üblichen Notation, die auf den babylonischen Kulturkreis zurückgeht, entspricht ein Vollkreis einem Winkel von 360°, ein rechter Winkel also 90°. Gerade in der Astronomie sind auch Unterteilungen von Winkelgeraden wichtig. Analog dazu, wie wir Stunden unterteilen, entsprechen 60 Bogenminuten, abgekürzt $60'$, einem Winkelgrad, und 60 Bogensekunden, kurz $60''$, einer Bogenminute.

3 Dreiecke

Zwei Punkte definieren eine Gerade, und ihr Abstand voneinander lässt sich bestimmen. Das war's dann freilich auch schon.Nimmt man noch einen weiteren Punkt hinzu, wird die Lage schon interessanter. Dann haben wir drei interessante Abstände und zusätzlich noch die Winkel, unter denen sich die drei Verbindungsgeraden an den Punkten, A, B bzw. C schneiden. Schon sind wir mitten in der Dreiecksrechnung, der Trigonometrie angelangt. Die in der folgenden Abbildung gewählte Bezeichnungsweise für Strecken und Winkel ist weit verbreitet, aber natürlich reine Konvention. Je nach den Erfordernissen können wir den Winkeln, Strecken und Punkten andere Namen geben. Hier ist jedenfalls das vollständige Dreieck:



Die dort eingetragenen Winkel lassen sich auch mithilfe der Punkte beschreiben; der Winkel, unter dem die Strecken AB und CB bei B zusammentreffen, hier β genannt, kann auch direkt als $\angle ABC$ (in anderer Schreibweise: $\measuredangle ABC$ oder $\sphericalangle ABC$) notiert werden.

Nun sollte auf den ersten Blick klar sein, dass die in das gezeigte Dreieck eingetragenen Größen a, b, c bzw. α, β, γ unmöglich alle unabhängig voneinander sein können. Am direktesten sieht man das, wenn man sich vorstellt, was passiert, wenn ich das oben gezeichnete Dreieck verändere. Ich lasse beispielsweise b und c konstant und mache den Winkel α kontinuierlich kleiner. Dann klappen die Schenkel der Länge b und c aufeinander zu, und a wird zwangläufig kleiner; die Winkel β und γ werden dagegen größer.

(Wer Schwierigkeiten mit dem räumlichen Vorstellungsvermögen hat — Menschen haben ja unterschiedliche Stärken und Schwächen —, der möge sich zwei [am besten nicht gleichlange] Stifte oder andere längliche Gegenstände besorgen, sie an einem Ende zusammenhalten und den Winkel zwischen variieren. Dabei sieht man ja direkt, wie sich der Abstand zwischen den äußeren Enden der Stifte zwangsläufig verändert. Auch mit der kostenlosen Software Geogebra kann man schön interaktiv herumprobieren und sich dabei Seitenlängen und Winkelwerte live anzeigen lassen.)

Die Mathematiker benötigen auch hierzu wieder ein Axiom, nämlich dass bei zwei Dreiecken, bei denen je zwei der drei Seiten dieselben Längen haben und der zwischen diesen beiden Seiten liegende Winkel gleich ist, auch alle anderen Größen (die zwei restlichen Winkel und die Länge der dritten Seite) gleich sind. (In der Sprache der Mathematik sind die Dreiecke kongruent, sprich: lassen sich durch Verschieben, Drehen und Spiegeln übereinander platzieren und zur Deckung bringen.) Auf zumindest einige weitere Möglichkeiten, aus drei der Größen die anderen zu berechnen, gehe ich unten noch näher ein.

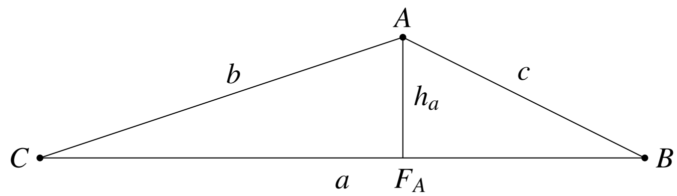
Die übliche Wahl der geometrischen Axiome hat zur Folge, dass alleine schon die Winkel α, β, γ nicht unabhängig voneinander sind. Das kann man veranschaulichen, indem man im Geiste (oder in Geogebra, oder ...) zwei der Winkel immer größer werden lässt. Der Dreieckspunkt, an dem der dritte Winkel gemessen wird, rückt damit immer weiter in die Ferne, und der entsprechende Winkel wird immer kleiner. Tatsächlich lässt sich beweisen, dass für Ebene Dreiecke die Winkel*summe* konstant ist, und zwar gilt immer

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ. \tag{1}$$

Sobald wir in der Vorlesung Dreiecke auf gekrümmten Flächen betrachten — insbesondere auf der Kugel und auf Sattelflächen — wird diese Gleichung nicht mehr gelten.

4 Flächen

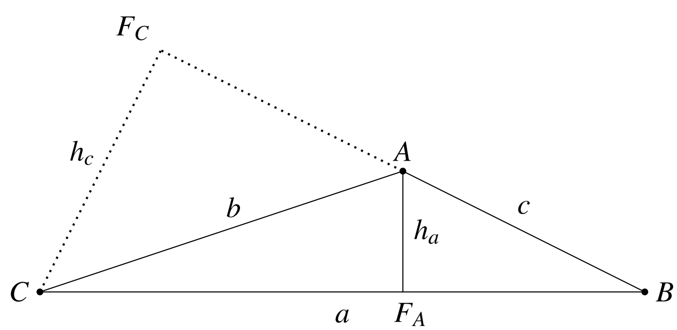
Fälle ich von einem der Dreieckspunkte das Lot auf die gegenüberliegende Seite des Dreiecks, dann wird die sich ergebende Strecke eine Höhe des Dreiecks genannt. Im nächsten Bild ist die Höhe $h_a = \overline{AF_A}$ (Lot vom Punkt A aus) eingezeichnet.



Die Fläche eines solchen Dreiecks wird definiert als

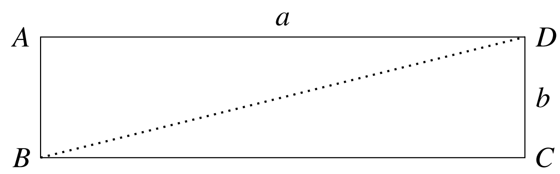
$$F(\triangle ABC) \equiv \frac{1}{2} a \cdot h_a. \tag{2}$$

Ist diese Definition überhaupt eindeutig? Sprich: Hängt sie nicht so, wie sie da steht, davon ab, welche der drei Möglichkeiten für die Höhe ich wähle? Tatsächlich führt jede Wahl zu demselben Ergebnis. In der folgenden Abbildung ist eine zweite Höhe eingezeichnet, nämlich jene, die zum Punkt C gehört:



In diesem Falle haben wir es mit einem Schnittpunkt zu tun, der außerhalb des ursprünglichen Dreiecks liegt; auch das kann vorkommen. Wichtig ist jetzt, dass die Dreiecke CF_CB und AF_AB die gleichen drei Winkel haben, nämlich einen gemeinsamen Winkel bei B, einen rechten Winkel (bei F_C bzw. F_A), und da die Summe der drei Winkel ja gemäß (1) 180° betragen muss, sind auch die jeweils dritten Winkel gleich groß. Solche Dreiecke heißen *ähnlich*. Zwei ähnliche Dreiecke unterscheiden sich nur durch einen Faktor, mit dem sämtliche Seitenlängen des ersten Dreiecks skaliert werden müssen, um dann die Längen der korrespondierenden Seiten des zweiten Dreiecks zu erhalten. Damit sind aber insbesondere die Verhältnisse korrespondierender Seiten gleich, insbesondere $h_a/c = h_c/a$. Letzteres heißt aber $h_a \cdot a = h_c \cdot c$, mit anderen Worten: die Höhe mal die Länge der Seite, auf welcher die Höhe senkrecht steht, hat in beiden Fällen den gleichen Wert. Unsere Definition der Dreiecksfläche ist damit unabhängig davon, welche der drei Höhen wir heranziehen.

Aus der Definition der Dreiecksfläche folgt direkt die bekannte Formel für die Fläche eines Rechtecks mit Seitenlängen a und b. Um das zu sehen müssen wir lediglich eine Diagonale einziehen und haben dann zwei gleiche rechtwinklige Dreiecke. Das ist in der folgenden Abbildung gezeigt.



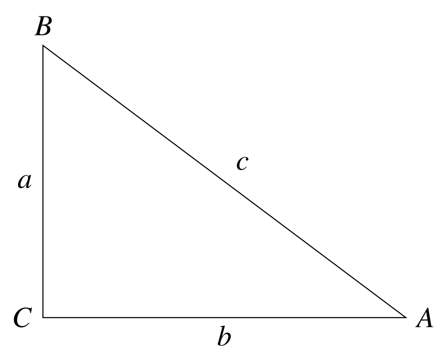
Die eingezeichneten rechtwinkligen Dreiecke darin sind ABD und BDC. Die Seite a ist gleichzeitig die Höhe des Dreiecks ABD vom Punkt D auf die Grundlinie AB, die ihrerseits die Länge b hat. Also ist die Fläche dieses Dreiecks gerade $1/2 \cdot a \cdot b$, nämlich die Hälfte des Produkts Höhe mal entsprechender Grundlinie, und die Fläche des zweiten Dreiecks hat denselben Wert. Für das Rechteck insgesamt erhalten wir damit wie erwartet

$$F = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = a \cdot b.$$

Die Flächen komplizierterer Mehrecke kann man berechnen, indem man diese Objekte in Dreiecke unterteilt und dann deren Flächen zusammenrechnet.

5 Satz des Pythagoras

Einer der schönsten Zusammenhänge im Bereich der Flächen ist der Satz des Pythagoras. Jeder Mathematiker hat vermutlich seinen eigenen Lieblingsbeweis. Meiner ist der folgende, bei dem man Flächen von Dreiecken und Rechtecken geeignet umarrangiert. Wir betrachten ein rechtwinkliges Dreieck mit Seitenlängen a, b, c:



Die Seiten a und b, die an den rechten Winkel bei C grenzen, heißen *Katheten*, die gegenüberliegende Seite heißt *Hypothenuse*. Der Satz des Pythagoras verknüpft die drei Seitenlängen in der allbekannten Form miteinander als

$$a^2 + b^2 = c^2, \tag{3}$$

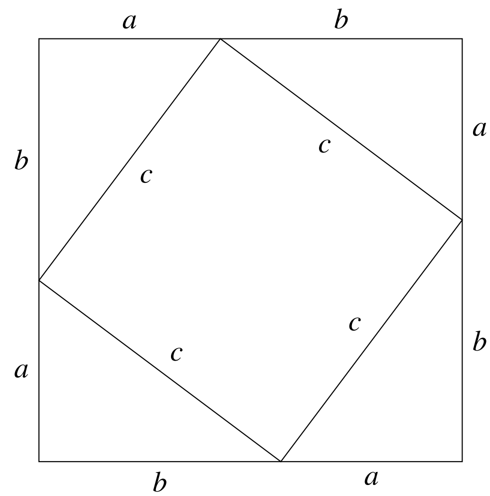
in Worten: Das Quadrat über der Hypothenuse hat dieselbe Fläche wie die Summe der Flächen der Quadrate über den beiden Katheten.

Wir werden in der Vorlesung noch sehen, dass das so etwas wie die Grundlage der gesamten herkömmlichen Geometrie der Ebene ist. In dieser Abstandsbeziehung steckt bereits, dass wir uns in einer euklidischen, flachen Fläche befinden, nicht etwa auf der Oberfläche einer Kugel oder auf einer Sattelfläche.

Dass wir hier über Flächen reden, ergibt sich bereits aus den Quadraten. Tatsächlich ist a^2 ja die Fläche eines Quadrats mit Seitenlänge a, und analog verhält es sich mit b^2 und c^2. Die Fläche des Dreiecks selbst ergibt sich der obigen Formel (2) nach zu

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b.$$

Jetzt konstruieren wir eine Unterteilung des Quadrats mit Seitenlänge $a + b$:

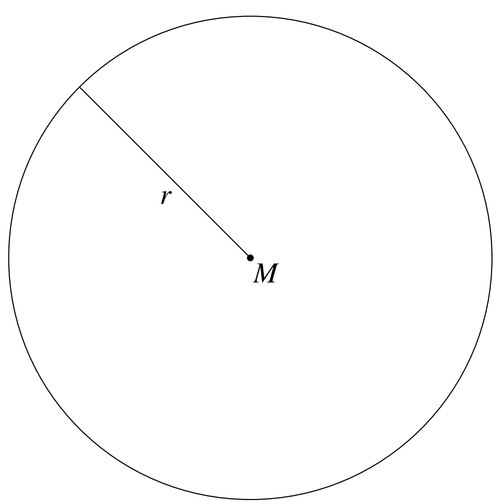


Offenbar hat das große Quadrat die Gesamtfläche $(a+b)^2$, und diese lässt sich schreiben als Summe des eingeschriebenen Quadrats und der vier Kopien unseres Dreiecks,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot b + c^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

6 Kreise und Bogenmaß

Sobald es Punkte und Abstände gibt, lassen sich auch Kreise definieren. Der Kreis mit Radius r und Mittelpunkt M ist die Gesamtheit all jener Punkte, deren Abstand vom Punkt M gerade den Wert r hat:



Skaliert man einen Kreis, vergrößert also alle Abständen und Längen um denselben Faktor, dann sollte sich auch der Kreisumfang um denselben Faktor verlängern. Anders gesagt: Das Verhältnis von Kreisumfang und Radius bleibt beim Skalieren konstant (weil sich eben beide um denselben Faktor ändern). Gehe ich von r zu $r' = ar$ über und vom ursprünglichen Umfangswert U zu $U' = Ua$, mit demselben konstanten Skalenfaktor a, dann bleibt das Verhältnis nun einmal gleich, $U'/r' = (Ua)/(ra) = U/r$. Dieses universelle, für jeden Kreis gleiche Verhältnis definiert die Kreiszahl Pi, geschrieben π. Die ist ursprünglich für das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser definiert, $\pi = U/d$, und da der Radius gerade der Hälfte des Durchmessers entspricht, haben wir entsprechend $U/r = 2\pi$.

Betrachten wir im folgenden zunächst den Einheitskreis, also den Kreis mit Radius $r = 1$. (Warum müssen Mathematiker hierzu keine Längeneinheit wählen, sondern können Längen bzw. Abstände mit Zahlen bezeichnen? Weil ihre Behauptungen und Beweise nur die Verhältnisse verschiedener Abstände bzw. Längen zueinander betreffen und somit unabhängig von der Längeneinheit gültig sind. Implizit haben die Mathematiker so etwas wie eine Einheitslänge definiert, sobald sie den Abständen Zahlenwerte zuordnen. Aber den expliziten Verweis auf diese Längeneinheit wegzulassen führt aufgrund der Beschränkung auf Verhältnisse zu keinem Widerspruch.)

Der Einheitskreis hat den Umfang 2π. Je zwei der eingezeichneten radialen Strecken zu zwei Kreispunkten definieren einen Winkel (nämlich den Winkel zwischen diesen am Kreismittelpunkt zusammentreffenden Strecken bzw. genauer zwischen den Halbstrahlen, die man erhält, wenn man jede der beiden Strecken vom Mittelpunkt kommend ins Unendliche fortsetzt). Je zwei eingezeichnete radiale Strecken definieren aber auch einen Abschnitt des Kreisbogens, nämlich den kürzeren der beiden Kreisbogenabschnitte, in die jene beiden radialen Strecken den Kreis teilen.

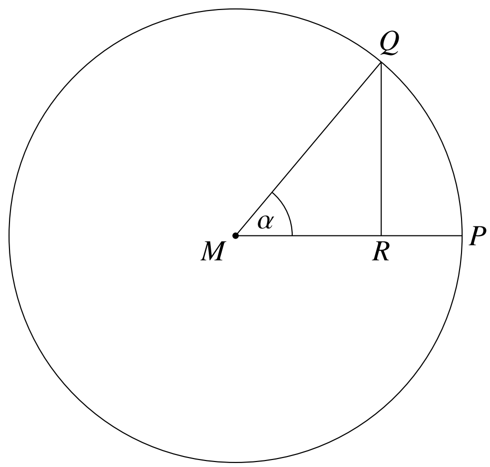
Auch die Länge dieses Kreisbogens kann man als Winkelmaß wählen, genannt Bogenmaß. Der Gesamtkreis entspricht einem Winkel von 360° entspricht dem vollen Kreisbogen der Länge 2π; teile ich den Kreis in zwei Hälften, hat jeder der Halbbögen die Länge π und entspricht dem Winkel 180°; die Längen der Teil-Kreisbögen addieren sich genau so wie die Winkel, und durch Addition und durch weitere Hälftelungen bekommt man schließlich ganz allgemein eine Korrespondenz, dass nämlich der als Kreisbogen, synonym „in Radian“ gemessene Winkel mit dem in Grad gemessenen Winkel zusammenhängt wie

$$\text{Winkel zum Kreisbogen } x \text{ entspricht Winkel von } \quad x \cdot \frac{180}{\pi} \text{ Grad.}$$

Solch einem Winkel die Einheit dahinterzuschreiben, also von einem Winkel von „$\pi/2$ rad“ (gesprochen „Pi-halbe Radian“) zu reden, finde ich eher verwirrend. Die Kreisbogenlänge hat dieselbe Längeneinheit wie jede andere Länge oder jeder andere Abstand in meiner Ebene. Bei rein geometrischen Betrachtungen verwende ich, wie die Mathematiker, einheitenlose Längen, und auch mein Winkel im Bogenmaß ist dann eine Zahl. Übertrage ich die Geometrie auf eine physikalische Situation, dann rechne ich zur Angabe des Bogenmaßes nach wie vor auf den Einheitskreis um (für einen Kreis des Radius 2 m ist der Winkel im Bogenmaß eben die in Metern gemessene Bogenlänge des Kreisabschnitts, geteilt durch 2 Meter und damit dimensionslos).

7 Winkelfunktionen

Betrachten wir wieder den Einheitskreis, den Kreis mit Radius $r = 1$. Angenommen, ich zeichne einen Kreisradius ein, etwa die Verbindungsstrecke zwischen dem Kreismittelpunkt M und dem auf dem Kreis liegenden Punkt P. Dann kann ich für jeden weiteren Kreisradius, der den Mittelpunkt M mit einem Punkt Q verbindet, die Senkrechte von Q auf MP fällen, die den Radius MP im Punkt R schneiden möge. Hier ist diese Situation dargestellt; ich habe den Kreis dabei im ganzen so gedreht, dass der erste Punkt P der Übersichtlichkeit auf gleicher Höhe, also direkt horizontal neben M liegt:



Wenn wir α variieren, dann variiert auch $\overline{MR}$, und zwar offenbar stetig (sprich: wenn wir α nur ein kleines bisschen verändert, dann verändert sich auch $\overline{MR}$ nur sehr wenig). Mathematisch gesprochen heißt das: $\overline{MR}$ ist eine stetige Funktion von α. Diese Funktion heißt Kosinus, und zwar ist mit den hier verwendeten Bezeichnungen im Einheitskreis

$$\cos(\alpha) \equiv \overline{MR}.$$

Das ist eine gute Definition, solange man Abständen wie $\overline{MR}$ keine Längeneinheit beifügt. Da wir uns im Einheitskreis befinden, macht es in solcher Situation keinen Unterschied, wenn wir auf der rechten Seite durch den Radius, also durch $1 = \overline{MQ}$ teilen,

$$\cos(\alpha) \equiv \frac{\overline{MR}}{\overline{MQ}}.$$

Es hat aber den Vorteil, dass wir uns über Einheiten keine Sorgen machen müssen; die rechte Seite ist hier ein Verhältnis von Längen und damit ganz klar dimensionslos.

Auch $\overline{QR}$ bzw. als Längenverhältnis geschrieben $\overline{QR}/\overline{MQ}$ ist eine stetige Funktion, genannt Sinus,

$$\sin(\alpha) \equiv \frac{\overline{QR}}{\overline{MQ}}.$$

Eine Besonderheit bei der Schreibweise kennen Sie vermutlich bereits: Bei diesen Funktionen lässt man dort, wo es keine Missverständnisse hervorrufen kann, oft die Funktionsklammern weg, z.B. $\sin(\alpha) \equiv \sin\alpha$, und beim Quadrieren oder anderen Potenzieren rückt man die Potenz an den Funktionsnamen heran, $(\sin\alpha)^2 \equiv \sin^2\alpha$.

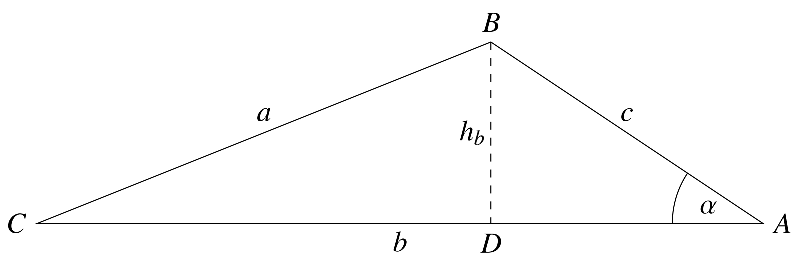
Aus der Definition lässt sich ablesen, dass Kosinus und Sinus periodische Funktionen sind, nämlich dass $\sin(\alpha + 360°) = \sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha + 360°) = \cos(\alpha)$. Aus dem Satz des Pythagoras (3), angewandt auf das rechtwinklige Dreieck MRQ, ergibt sich übrigens direkt die Beziehung

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \tag{4}$$

Betrachten wir nicht ein rechtwinkliges Dreieck im Einheitskreis, sondern das entsprechende Dreieck in einem Kreis mit Radius c, dann müssen wir alle Längen, die in der obigen Skizze vorkommen, mit dem gemeinsamen Faktor c skalieren. Hier lohnt es sich, dass wir Kosinus und Sinus in der zweiten Version als Längenverhältnis geschrieben haben. Ein Längenverhältnis bleibt unverändert, wenn wir alle Längen mit dem gleichen Faktor skalieren. Entsprechend bleiben auch Kosinus- und Sinusdefinitionen bei einer Neuskalierung unverändert, auch für einen Nicht-Einheitskreis,

$$\cos(\alpha) \equiv \frac{\overline{MR}}{\overline{MQ}} \quad \text{und} \quad \sin(\alpha) \equiv \frac{\overline{QR}}{\overline{MQ}}.$$

Die Winkelfunktionen erlauben es uns, nützliche Rechenbeziehungen zwischen Winkeln und Seiten allgemeiner Dreiecke aufzustellen. Eine davon ist der Kosinussatz, der sich auf das folgende allgemeine Dreieck bezieht:



Neben dem Dreieck $\triangle ABC$ selbst ist die Höhe h_b eingezeichnet, gefällt von B auf die Seite b; der Endpunkt, an dem die Höhe auf die Seite b trifft, heißt hier D. Für das rechtwinklige Teildreieck $\triangle BDA$ gilt der Satz des Pythagoras; mit der Abkürzung $p = \overline{AD}$ haben wir

$$c^2 = h_b^2 + p^2. \tag{5}$$

Analog gilt für das linke Teildreieck $\triangle CDB$, dass

$$a^2 = h_b^2 + (b - p)^2. \tag{6}$$

Indem wir Gleichung (5) von Gleichung (6) abziehen, erhalten wir die Gleichung

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bp + p^2 - p^2 = c^2 + b^2 - 2bp. \tag{7}$$

in der h_b nicht mehr vorkommt. Nach der Definition des Kosinus ist p aber gerade $p = c\cos\alpha$, und so haben wir endlich

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\cos\alpha. \tag{8}$$

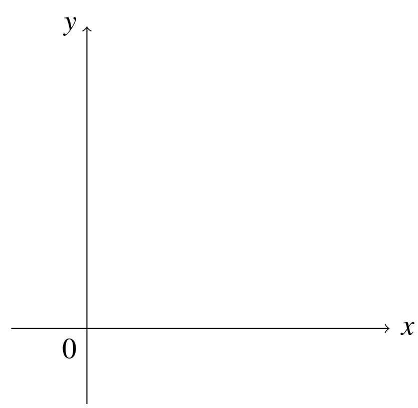
Das ist der Kosinussatz für den Winkel α. Da sich α in keiner Weise vor den anderen beiden Winkeln auszeichnet, gelten entsprechende Ausdrücke auch für $\cos\beta$ und $\cos\gamma$.

8 Kartesische Koordinaten

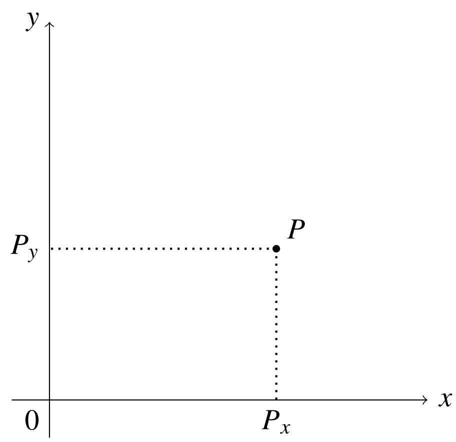
Bislang haben wir nur mit einzelnen Punkten operiert, die jeweils einen Eigennamen wie P oder Q oder A oder B bekommen haben. Wie finden wir eine Möglichkeit, im Prinzip *alle* Punkte in der Ebene so zu beschreiben, dass sich mit ihnen rechnen lässt? Das ist die Motivation für die Einführung von Koordinaten. Wenn wir in der Vorlesung über die geometrische Version von Invarianz und Relativität reden, dann wird dieser Anspruch, nämlich alle Punkte in unserer „Koordinatensprache" einheitlich beschreiben zu können, das Kriterium der *Universalität* sein, das bei unseren verallgemeinerten Überlegungen eine wichtige Rolle spielt.

Um Koordinaten festzulegen, brauchen wir zwingend Hilfskonstruktionen. Wir beginnen mit den sogenannten kartesischen Koordinaten.

Wir führen auf unserer Ebene zwei Geraden ein, die wir x-Achse und y-Achse nennen. Beide liegen rechtwinklig zueinander; ihren Schnittpunkt nennen wir Nullpunkt und markieren ihn mit einer Null. Unendlich lange Geraden sind auf realem Papier (auch in der virtuellen Computerversion!) nicht zu zeichnen; wir folgen den üblichen Konventionen und zeichnen nur einen endlichen Ausschnitt, der für die ganze Achse steht. Unsere Achsen sollen eine Richtung haben; diese wird üblicherweise durch eine Pfeilspitze angezeigt. Hier die Ihnen sicher wohlbekannte Darstellung eines solchen Koordinatenkreuzes aus x- und y-Achse:



Koordinaten sind so etwas wie ein generischer, systematisch bestimmbarer Name für jeden Punkt der Ebene. Um sie für einen Punkt P zu bestimmen, gehen wir wie folgt vor:



Wir fällen von P aus das Lot auf die x-Achse; das Lot schneidet die x-Achse im Punkt P_x, der oben eingezeichnet ist. Ebenso fällen wir das Lot von P aus auf die y-Achse; das Lot schneidet die y-Achse im Punkt P_y.

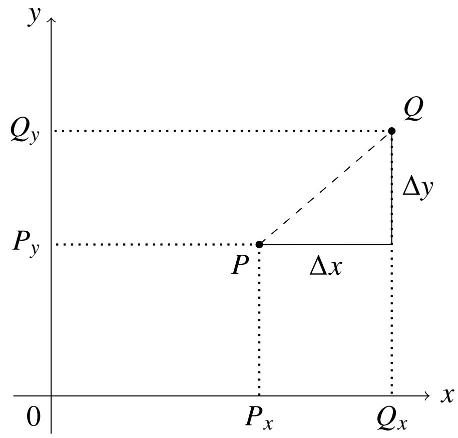
Dann nennen wir $x \equiv \epsilon_x \overline{PP_y}$ den x- und $y \equiv \epsilon_y \overline{PP_x}$ den y-Koordinatenwert des Punkts. Die zusätzlichen Faktoren ϵ_x und ϵ_y tragen lediglich ein Vorzeichen bei, und zwar wie folgt: Befindet sich P_x vom Nullpunkt 0 aus gesehen auf demjenigen Halbstrahl der x-Achse, die in unserer Abbildung den Pfeil trägt („positive Halbachse"), dann gilt $\epsilon_x = +1$. Befindet sich P_x auf dem anderen Halbstrahl, gilt $\epsilon_x = -1$. Analog wird der Wert von $\epsilon_y = \pm 1$ bestimmt.

In Koordinatenschreibweise trägt unser Punkt P dann den „Namen" (x, y), wobei für x und y die genannten Abstandswerte zur x- bzw. y-Achse eingesetzt sind. Sofern wir über die gesamte Ebene reden, kann sowohl x als auch y beliebige reelle Werte annehmen. Dass wir zwei Werte benötigen, um einen Punkt zu beschreiben, hängt direkt damit zusammen, dass die Ebene ein zweidimensionales Gebilde ist.

Die Koordinatenwert-Klammer-Paare, Mathematiker nennen sie „Tupel", haben gleich drei Funktionen. Zum einen sind sie tatsächlich so etwas wie eindeutige Namen — jedem Punkt ist ein eindeutiges Zahlenpaar (x, y) zugeordnet; zu jedem reellen Zahlenpaar (x, y) gehört ein Punkt der Ebene.

Zweite Funktion ist, dass die Paare so etwas wie Nähe ausdrücken können. Wenn sich sowohl die x- als auch die y-Koordinate eines Punkts P nur sehr wenig von den entsprechenden Koordinatenwerten eines anderen Punkts P' unterscheiden, dann liegen die Punkte nahe beieinander. Die Zweidimensionalität macht es etwas schwierig, diesen Unterschied allein anhand der Koordinaten zu fassen, aber insbesondere gilt: Haben drei Punkte $P_1 = (x_1, y)$, $P_2 = (x_2, y)$ und $P_3 = (x_3, y)$ jeweils denselben y-Koordinatenwert und gilt $x_1 < x_2 < x_3$, dann liegt der Punkt P_2 in der Ebene zwischen den Punkten P_1 und P_2. Die mathematische Version solcher Nähe-Beziehungen nennt sich Topologie.

Dritte Funktion von Koordinaten ist die Bestimmung von Entfernungen. Das ist bei den kartesischen Koordinaten besonders einfach, wie man in der nachfolgenden Abbildung für die zwei Punkte $P = (x_1, y_1)$ und $Q = (x_2, y_2)$ sieht.



Dort nämlich ist der Abstand $d \equiv \overline{PQ}$ die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen zwei Katheten die Längen $\Delta x = x_2 - x_1$ und $\Delta y = y_2 - y_1$ haben. Mithilfe des Satzes des Pythagoras (3) können wir den Abstand daher direkt aus den Koordinatenwertdifferenzen berechnen, und zwar gilt

$$d^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2 \tag{9}$$

oder, wenn wir auf beiden Seiten die Wurzel ziehen,

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{10}$$

Eine solche Funktion, die es erlaubt, aus Koordinatendifferenzen Abstände zu berechnen, heißt *Metrik* und wird in unseren Überlegungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie eine Schlüsselrolle spielen.

9 Raumkoordinaten

Bislang haben wir der Einfachheit halber nur die zweidimensionale Ebene betrachtet. Kartesische Koordinaten lassen sich aber ebenso gut im dreidimensionalen Raum einführen. Dort gibt uns der (kleinste) Abstand eines Punktes von der yz-Ebene den x-Koordinatenwert des Punktes, der kleinste Abstand des Punktes von der xz-Ebene den y-Koordinatenwert und der kleinste Abstand von der xy-Ebene den z-Koordinatenwert.

Dafür, wie man den Abstand d zweier Punkte $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ aus den Koordinatendifferenzen bestimmt, gilt eine dreidimensionale Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras,

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \tag{11}$$

10 Raumzeitkoordinaten

Nachdem wir bislang herkömmliche ebene Koordinaten betrachtet hatten, nun ein paar Worte zu Raumzeitkoordinaten. Raumzeit klingt erst einmal fremd und nach Relativitätstheorie, ist aber zunächst einmal nichts allzu besonderes. Angenommen, wir haben eine Zeitkoordinate definiert, sprich: jedem kurzen Ereignis können wir einen Zeitwert zuordnen. Ein Ereignis ist dabei etwas, das sowohl einen Ort besitzt, an dem es stattfindet, als auch einen Zeitpunkt zu dem es stattfindet. Beide müssen wir angeben, um das Ereignis festzulegen.

Mit moderater Präzision machen wir das im Alltag wenn wir sagen, ein Vortrag im Haus der Astronomie beginne am 18. Oktober 2015 um 11 Uhr, wenn wir uns mit Freunden am 15.10.2015 um 14:15 Uhr in einem bestimmten Café verabreden oder wenn wir festhalten, eine bestimmte E-Mail von einem bestimmten Computer zu einer bestimmten Uhrzeit abgeschickt zu haben.

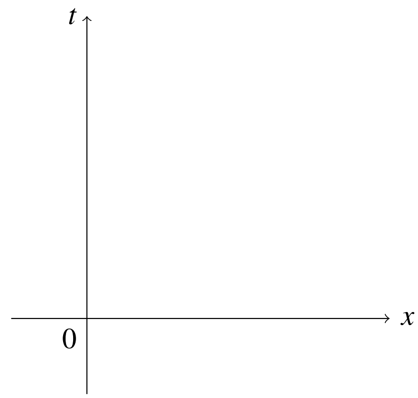
Ein Objekt befindet sich zu jeder gegebenen Zeit nicht nur an einem einzigen Ort, sondern überdeckt ein bestimmtes Volumen (und damit viele nahe beieinander liegende, aber durchaus voneinander verschiedene Orte). In der Physik sprechen wir oft trotzdem näherungsweise von einem eigenen Ort, etwa jenem des Schwerpunkts des Objekts — das ist für viele Anwendungen eine vollkommen ausreichende Näherung.

Ebenso dauern wirkliche Ereignisse in der Regel eine gewisse Zeitspanne. Selbst der Schlag einer Uhr findet nicht um, sagen wir, Punkt 12 Uhr statt, sondern von 12 Uhr bis 12 Uhr plus einige Hundertstelsekunden. Auch dort reden wir der Einfachheit halber trotzdem davon, der Uhrenschlag habe „um 12 Uhr“ stattgefunden.

Ein *Punktereignis* oder *Elementarereignis* ist ein Ereignis, das genau an einem Ort und zu einem einzigen Zeitpunkt stattfindet. Oft können wir vereinfacht mithilfe solcher Elementarereignisse beschreiben, was passiert – Licht etwa, das an einem bestimmten Ort zu einer bestimmten Zeit abgestrahlt wird und zu einer bestimmten späteren Zeit an einem anderen Ort ankommt; ein Planet im Sonnensystem, der zu jeder Zeit einen bestimmten Ort relativ zur Sonne und relativ zu den anderen Planeten besitzt; zwei Elementarteilchen, die an einem bestimmten Ort zu einer bestimmten Zeit zusammentreffen. Wenn wir im weiteren (bzw. in der Vorlesung) von Ereignissen reden, werden damit in der Regel Elementarereignisse gemeint sein.

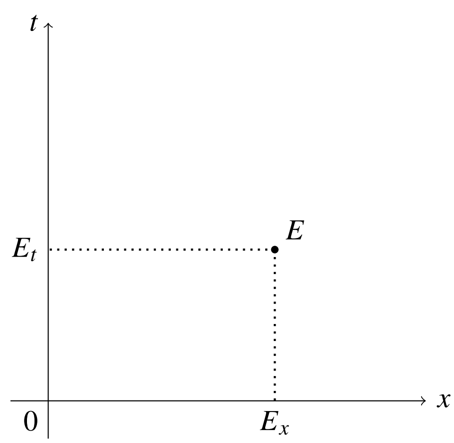
Auch die Gesamtheit aller möglichen Ereignisse lässt sich grafisch darstellen. Analog dazu, wie die Gesamtheit aller Punkte einer Ebene die (zweidimensionale) Ebene definiert und die Gesamtheit aller Punkte im (dreidimensionalen) Raum den Raum ausmacht bildet die Gesamtheit der Ereignisse ein vierdimensionales Gebilde: die Raumzeit.

Betrachten wir vereinfacht nur eine einzige Raumdimension — z.B. Ereignisse auf der x-Achse — und die Zeitdimension. Jedes Ereignis auf der x-Achse lässt sich dann in ein zweidimensionales Raumzeitdiagramm eintragen. Das Diagramm gibt die Raumkoordinate x und die Zeitkoordinate t grafisch wieder. Dazu zeichnen wir zunächst einmal zwei Achsen ein:



Die Zeit t zählen wir in solchen Fällen nicht so kompliziert wie im Alltag, mit Tagen, Stunden und deren Vielfachen und Unterteilungen. Wir wählen eine einheitliche Zeiteinheit, typischerweise Sekunden (als die Zeiteinheit des Système International, SI), und als Zeitnullpunkt einen (willkürlich gewählten) bestimmten Zeitnullpunkt — z.B. den Mittag des 1.1.2015, Ortszeit von Berlin. Ich schreibe dies dann ziemlich genau zur Zeit $t = 25139100$ Sekunden.

Sobald wir einem Ereignis einen Zeitpunkt und einen Ort zugeordnet haben, können wir es in das Raumzeitdiagramm eintragen.



Das geht analog dazu, wie wir Punkte in ein zweidimensionales Koordinatensystem eingetragen haben: Wir laufen vom Ereignis E aus parallel zur x-Achse, bis wir auf die Zeitachse stoßen. Der Abstand des Schnittpunkts E_t vom Nullpunkt ergibt den Zeitkoordinatenwert des Ereignisses. Laufen wir stattdessen parallel zur Zeitachse bis zur x-Achse zeigt uns der dortige Schnittpunkt E_x, wie weit E vom Raumnullpunkt entfernt ist.

Zeitdifferenzen und Abstände in x-Richtung lassen sich in solch einem Diagramm direkt als Koordinatendifferenzen ablesen. Was es mit dem Abstand zweier Punkte auf sich hat, ist etwas schwieriger. Darauf werden wir in der Vorlesung noch eingehen. Eine so einfache Deutung wie im Falle der ebenen Geometrie hat der Abstand zweier Ereignisse jedenfalls nicht.