Arbeitsblätter:

Wie fliegen Astronauten mit einer Rakete zur ISS?

Markus Nielbock

22. Januar 2019

Abbildung 1: Die Sojus-Rakete auf dem Weg zur Startrampe (Bild: NASA).

Einleitung

In dieser Übung wirst du die Überlegungen und Berechnungen einer Raketeningenieurin oder eines Raketeningenieurs nachempfinden. Du machst dich mit den Grundbegriffen des Raketenflugs vertraut und berechnest, wie viel Treibstoff eine Rakete verbraucht. Dabei wirst du erkennen, warum Raketen so groß sein müssen. Ausgehend von den wichtigsten Kenngrößen einer Rakete berechnest du schließlich ihre Endgeschwindigkeit im Erdorbit.

Materialien

- Arbeitsblätter
- Stift
- Taschenrechner
- Computer mit Tabellenkalkulation (z. B. MS Excel)

Dauer

90 Minuten

Aktivität: Raketenflug

Schub und Treibstoff

Die Schubkraft ist die Kraft, mit der eine Rakete aufgrund des Brennvorgangs vorangetrieben wird. Sie wird mit dem Formelzeichen S bezeichnet. Genaueres kannst du auf Seite 7 nachlesen. Dort findest du auch, wie man den Schub berechnet und welche Größen dabei eine Rolle spielen.

Das grundlegende Prinzip zeigt Alexander Gerst während eines Experiments auf der ISS.

https://youtu.be/bkdXM0L6ghI

1. Schubkraft eines Kugelstoßers

Ein Kugelstoßer der Weltklasse beschleunigt die 7,257 kg schwere Kugel innerhalb von einer Sekunde auf eine Abwurfgeschwindigkeit von 14 m/s. Berechne den dadurch auf den Kugelstoßer ausgeübten Schub.

2. Schubkraft eines Raketentriebwerks

Die russische Sojus-FG-Rakete, mit der Alexander Gerst zur ISS flog, besteht aus drei Raketenstufen mit jeweils eigenen Triebwerken. Die erste Stufe besteht aus vier identischen Triebwerken vom Typ RD-107A, die seitlich an der Rakete angebracht sind. Man nennt diese Konfiguration auch Booster. Beim Start erzeugen sie einen Schub von insgesamt $S = 4146400\,\mathrm{N}$ und die Ausströmgeschwindigkeit beträgt $w = 2580\,\mathrm{m/s}$. Berechne den Treibstoffdurchsatz μ.

3. Treibstoffmenge und Tanks einer Rakete

Die zweite Raketenstufe der Sojus-FG besitzt ein Triebwerk des Typs RD-108A. Als Treibstoff dient ein Gemisch aus Kerosin und flüssigem Sauerstoff (LOX, liquid oxygen), das im Volumenverhältnis 1:2,43 einen Schub von $S = 792650\,\mathrm{N}$ erzeugt. Die Ausströmgeschwindigkeit beträgt während der Brenndauer von 280 s im Mittel $w = 2525\,\mathrm{m/s}$. Berechne μ.

Berechne nun, wie viel Kerosin und Sauerstoff (in kg) während der Brenndauer umgesetzt werden. Wie hoch ist die Gesamtmasse der Treibstoffe?

Wir wollen nun berechnen, wie groß die Treibstofftanks für Kerosin und Sauerstoff sein müssen. Dazu solltest du dir in Erinnerung rufen, was die Dichte eines Stoffs, hier einer Flüssigkeit, bedeutet und wie man sie berechnet. Wir können annehmen, dass die Dichten der beiden Stoffe $\varrho_{\mathrm{Ker}} = 830\,\mathrm{kg/m^3}$ bzw. $\varrho_{\mathrm{LOX}} = 1144\,\mathrm{kg/m^3}$ betragen. Mit dieser Information berechnest du nun die Volumina, die das Kerosin und das LOX einnehmen.

Nun sollst du ausrechnen, wie hoch die jeweiligen Tanks der Raketenstufe sein müssen. Da wir für die Tanks eine Zylinderform annehmen, musst du dafür wissen, wie man das Volumen eines Zylinders berechnet. Aufgrund des Durchmessers der Rakete ist der Durchmesser der Tanks auf jeweils 2,2 m beschränkt. Wie hoch müssten die Tanks sein?

Wie steht das in Relation zur Höhe der Raketenstufe, die 27,1 m misst?

Endgeschwindigkeit einer einstufigen Rakete

Betrachte den Idealfall einer kräftefreien, einstufigen Rakete. Das bedeutet, wir nehmen an, dass

1. die Rakete von äußeren Kräften wie die Schwerkraft oder die atmosphärische Reibung nicht beeinflusst wird,

2. die Rakete den kompletten Treibstoff in einem Brennvorgang umsetzt.

Die Rakete habe die folgenden Eigenschaften.

Eigenschaft	Formelzeichen	Wert
Gesamtmasse Rakete	m_0	320 t
Leermasse Rakete	m_B	20 t
spezifischer Impuls	w	2800 m/s
Brenndauer	τ	600 s

Berechne hieraus die Masse des Treibstoffs m_{treib}, den Treibstoffdurchsatz μ und den Schub S.

1. Genäherte Lösung durch Methode der kleinen Schritte

Schau dir die Gleichung für die Berechnung der Geschwindigkeitsänderung einer Rakete an (Gl. 15, Seite 9). Sie gibt an, um wie viel die Geschwindigkeit der Rakete steigt, wenn sie eine bestimmte Menge Treibstoff verbrennt und die Gase mit einer definierten Geschwindigkeit ausgestoßen werden. Sie ist hier noch einmal wiedergegeben:

$$\Delta v_R = \frac{\Delta m}{m_0 - \Delta m} \cdot w$$

Hier wirkt das Rückstoßprinzip. Aus demselben Grund fliegt ein Luftballon, aus dem man die Luft heraus lässt. Das ausströmende Gas besitzt einen Impuls. Da jedoch für die gesamte Rakete der Impuls erhalten bleibt, wirkt dem Betrag nach derselbe Impuls als Vortrieb der Rakete in die andere Richtung. Die Impulserhaltung ist ein Grundgesetz der Physik.

Man kann auch so argumentieren, dass der Schub einer Rakete, der durch die ausströmenden Gases bestimmt wird, die Rakete mit eben dieser Kraft nach vorne treibt. Wegen der resultierenden Beschleunigung der Rakete nimmt ihre Geschwindigkeit ständig zu.

Frage: Warum kann man mit Gl. 15 die Endgeschwindigkeit nicht korrekt ausrechnen?

Wir können diese Gleichung dennoch nutzen, wenn wir die Brenndauer der Rakete in kleinere Einzelschritte unterteilen. Damit kannst du die Endgeschwindigkeit der Rakete sehr gut abschätzen. Dieses Prinzip soll nun genauer untersucht werden. Erzeuge Dir dafür zunächst drei Tabellen, die folgende Spalten enthalten:

Schritt	Raketenmasse m_0 (kg)	Masse bei Brennende m_B (kg)	Geschwindigkeitszuwachs Δv_R (m/s)	Endgeschwindigkeit v_R (m/s)
0	320000	–	0	0

Schritt 0 bedeutet, dass wir hier die Startparameter eintragen. Die Rakete bewegt sich noch nicht. Deswegen kann man auch noch keine Masse bei Brennende eintragen.

Füge zur ersten Tabelle eine Zeile hinzu, zur zweiten 3 und zur dritten 5. In die erste Spalte „Schritte" trägst du jeweils fortlaufende Zahlen ein, so dass diese Spalte die Zeilen durchnummeriert. Dies sind die jeweiligen Einzelschritte, die wir oben bereits erwähnt haben.

Berechne nun für jede Tabelle das Δm, also die Masse, die pro Rechenschritt vom Triebwerk ausgestoßen wird. Hierzu teilst du ganz einfach den am Anfang vorhandenen Treibstoff in so viele Pakete auf, wie die jeweilige Tabelle Schritte aufweist. Tabelle 1 besitzt nur einen Schritt. Somit gilt dort:

$$\Delta m = \frac{m_{\text{treib}}}{\text{Anzahl der Schritte}} = \frac{m_0 - m_B}{1} = 300\,\text{t} = 300000\,\text{kg}$$

Nun kannst du die Werte für Schritt 1 ausrechnen. Die aktuelle Raketenmasse in der Tabelle ist immer die Masse am Brennende des vorherigen Schritts. Da in Tabelle 1 Schritt 0 nur den Anfangszustand wiedergibt, hat sich die Masse nicht geändert. Berechne nun die Masse bei Brennende m_B. Bedenke, dass bei jedem Schritt Δm des Treibstoffs verbrannt werden.

Frage: Warum fällt die Restmasse der Rakete nicht auf Null ab?

Mithilfe von Gl. 15 kannst du nun die Geschwindigkeitsänderung Δv_R der Rakete ausrechnen, die während dieses Schritts zur vorherigen Geschwindigkeit hinzu kommt. Die Endgeschwindigkeit am Ende eines Berechnungsschritts erhältst du, wenn du Δv_R zu v_R aus dem vorherigen Schritt hinzurechnest. In Tabelle 1 ist $\Delta v_R = v_R$, da v_R zuvor Null betrug.

Füge diese Rechenoperationen nun für die beiden anderen Tabellen durch. Beachte, dass dort Δm andere Werte annimmt. Berechne jeden Schritt einzeln.

Frage: Wie unterscheiden sich die Geschwindigkeiten der Rakete am Ende? Diskutiere den Unterschied mit deinen Mitschülern und versuche, eine Erklärung zu erhalten.

Frage: Was passiert mit der Endgeschwindigkeit der Rakete, wenn du die Anzahl der Schritte erhöhst?

2. Methode der kleinen Schritte mit MS Excel

Erzeuge nun solch eine Tabelle in MS Excel und führe die Berechnungen mit Operationen der Tabellenkalkulation durch. Wähle hierfür eine deutlich größere Anzahl von Schritten. Um die Ergebnisse zu vergleichen, sprich dich mit deinen Nachbarn bei der Wahl der Anzahl der Schritte ab, z. B. 30, 60 und 150.

Frage: Was stellst du bezüglich den Endgeschwindigkeiten fest, wenn du dein Ergebnis mit deinen Mitschülern vergleichst? Erkläre die Beobachtung.

Recherchiere, mit welcher Geschwindigkeit die ISS um die Erde fliegt. Wie passt dieser Wert zur Geschwindigkeit der Rakete?

Hintergrund

Die Internationale Raumstation

Abbildung 2: Die ISS im Jahre 2011 (Bild: NASA).

Seit 1998 wird die Internationale Raumstation (ISS, Abb. 2) aufgebaut und mittels einzelner Module (Abb. 3) ständig erweitert. Ihr Betrieb ist bis mindestens 2024 vorgesehen, wahrscheinlich aber sogar bis 2028 möglich. Die gesamte Struktur hat eine Masse von 420 t. Sie ist 109 m lang, 73 m breit und 45 m hoch. Auf einer Bahnhöhe von etwa 400 km benötigt die ISS für eine Erdumrundung ungefähr 92 Minuten.

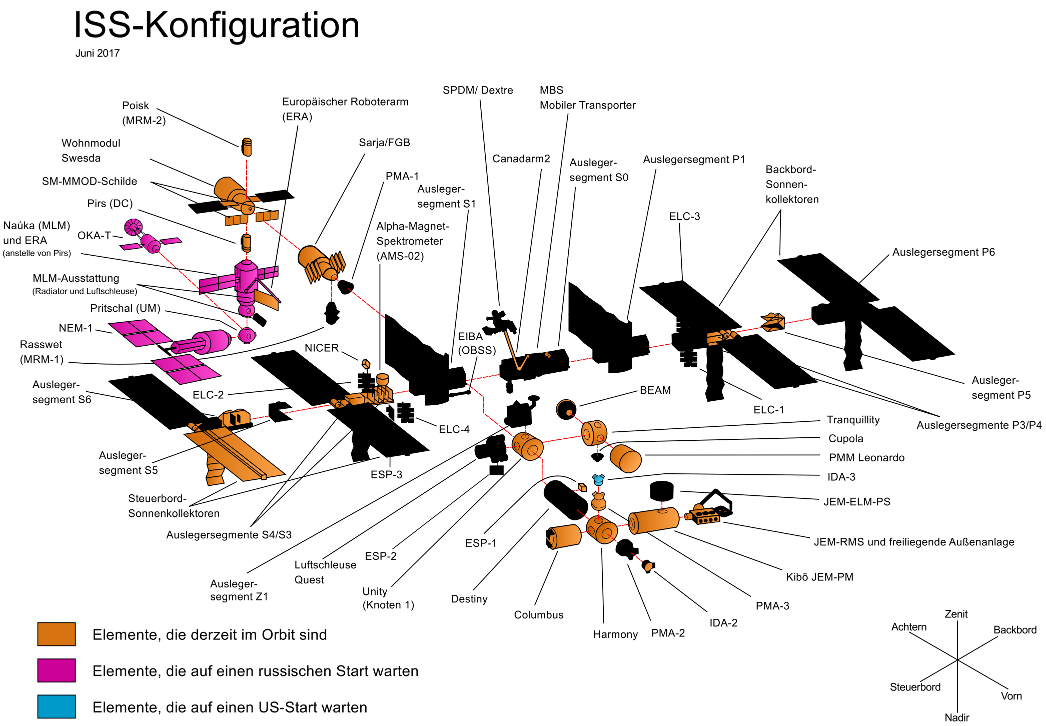


Abbildung 3: Die Module der ISS im Juni 2017 (Bild: NASA).

Die ISS ist ein internationales Projekt mit derzeit 15 beteiligten Nationen. Sie dient als wissenschaftliches Forschungslabor für Fragestellungen, in denen z. B. der Einfluss der Gravitation auf der Erde bei Experimenten hinderlich ist. Es werden aber auch medizinische Themen der Astronautik behandelt, um langfristige Missionen innerhalb des Sonnensystems vorzubereiten.

Sojus-FG-Rakete (Ракета «Союз-ФГ»)

Seit dem letzten Start eines Space-Shuttles am 8. Juli 2011 sind die russischen Sojus-Raketen das einzige Trägersystem, das Menschen zur ISS bringen kann. Erst ab Frühjahr 2019 sind erste bemannte Testflüge mit US-amerikanischen Raumschiffen geplant. Die Variante Sojus-FG (Abb. 4) wird dafür bereits seit 2001 routinemäßig benutzt. Alle Starts waren seitdem erfolgreich. Die Rakete basiert auf dem Modell R-7, das seit 1957 gebaut wurde. Sie war die Basis nahezu aller nachfolgenden Raketen, die in der Erkundung des Weltraums durch die damalige Sowjetunion und dem heutigen Russland entwickelt und genutzt wurden.

Die Sojus-FG besitzt je nach Nutzung drei bis vier Raketenstufen, wobei für den Transport des Sojus-Raumschiffs lediglich drei benötigt werden (Abb. 4). Das Raumfahrzeug hat einen eigenen Antrieb, der die Astronauten vom Orbit in 200 km Höhe auf 400 km bringt, wo die ISS sich befindet.

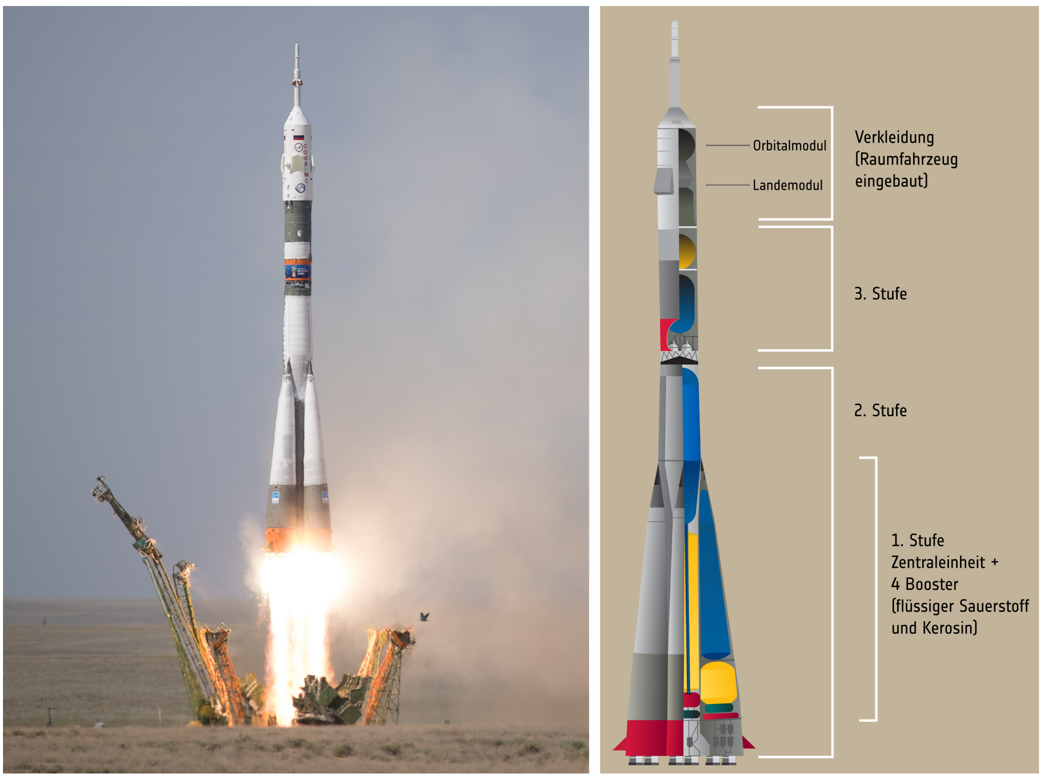


Abbildung 4: Links: Start der Sojus-FG-Rakete am 6. Juni 2018, mit der Alexander Gerst zur ISS flog (NASA/Joel Kowsky, `https://www.flickr.com/photos/nasahqphoto/41898551494/` (CC BY-NC-ND 2.0). Rechts: Schematische Darstellung einer Sojus-FG-Rakete, `https://www.flickr.com/photos/europeanspaceagency/35788717360/in/album-72157684209960351/` (ESA/Ausschnitt, deutsche Beschriftung: M. Nielbock).

In dieser Konfiguration besitzt die Rakete eine Höhe von 49,5 m und eine Startmasse von etwa 310 t. Sie kann eine Nutzlast von bis zu 7,4 t in einen erdnahen Orbit bringen.

Triebwerke und Stufen der Sojus-FG-Rakete

Die russische Sojus-FG-Rakete, mit der Alexander Gerst zur ISS flog, besteht aus drei Raketenstufen mit jeweils eigenen Triebwerken. Sie alle werden mit einer raffinierten Form von Kerosin, genannt RD-1 (rocket propellant), und flüssigem Sauerstoff (LOX, liquid oxygen) betrieben.

Die erste Stufe besteht aus vier identischen Triebwerken vom Typ RD-107A, die seitlich an der Rakete angebracht sind. Man nennt diese Konfiguration auch Booster. Die zweite Stufe ist die Zentraleinheit, die am Start zusammen mit der ersten Stufe gezündet wird. Das Triebwerk vom Typ RD-108A brennt jedoch länger als die erste Stufe. Nach dem Abwerfen der zweiten Stufe zündet die dritte Stufe, die mit einem Triebwerk RD-0110 ausgestattet ist. Sie hebt schließlich das Sojus-Raumschiff auf eine Höhe von etwa 200 km von wo es sich eigenständig an die ISS annähert.

Schubkraft eines Raketentriebwerks

Wir kennen bereits das Prinzip des freien Falls. Ein Objekt mit einer Masse m wird durch die Gravitationskraft der Erde angezogen. Diese Kraft führt dazu, dass dieses Objekt – einmal losgelassen – auf die Erde fällt. Dabei nimmt die Geschwindigkeit stetig zu. Die Rate, mit der die Geschwindigkeit sich ändert, nennt man Beschleunigung. Dieser Zusammenhang ist auch als die *Grundgleichung der Mechanik* oder *2. Newtonsches Axiom* bekannt. Daher kann man schreiben:

$$F_g = m \cdot a \tag{1}$$

$$\text{mit: } a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{2}$$

Diese Gleichung setzt also die auf m wirkende Kraft F_g in Beziehung zur Beschleunigung a, die es erfährt. In Bodennähe kann die Kraft vereinfacht durch $m \cdot g$ geschrieben werden, wobei g die Erdbeschleunigung ist. Wir nehmen hier den Wert am Äquator der Erde an ($g = 9,8\,\mathrm{m/s^2}$).

$$F_g = m \cdot g = m \cdot a \tag{3}$$

Mit Gl. 2 erhält man dann:

$$m \cdot g = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{4}$$

Die Geschwindigkeit der Masse m nimmt daher im freien Fall je Zeiteinheit Δt um Δv zu, also in einer Sekunde um 9,8 m/s. Wir sehen hier auch, dass ohne weitere äußere Krafteinwirkung (z. B. Luftreibung) die Masse m sich wegkürzt. Daraus folgt, dass der Geschwindigkeitszuwachs eines Objekts nicht von seiner Masse, sondern lediglich von der wirkenden Erdbeschleunigung g abhängt.

Mit einer Rakete möchten wir das genaue Gegenteil erreichen, nämlich eine Nutzlast entgegen der wirkenden Gravitation nach oben befördern. Hierfür wird eine Kraft benötigt, die man als Schubkraft bezeichnet. Hierfür könnte man schlicht F_S schreiben. Es hat sich jedoch die Schreibweise S etabliert. Diese Schubkraft, oder kurz Schub, wird durch den Auswurf von verbranntem Treibstoff unter hoher Geschwindigkeit w erzeugt. Man benutzt hier das Formelzeichen w, um die Geschwindigkeit der Triebwerkgase von der Geschwindigkeit der Rakete zu unterscheiden. Die Masse des Treibstoffs wird der Gesamtmasse der Rakete entzogen und wird deshalb mit Δm bezeichnet.

Der Treibstoffdurchsatz $\mu = \Delta m/\Delta t$ zeigt also an, mit welcher Rate Treibstoff verbraucht wird und sich die Masse der Rakete ändert. Insgesamt erhält man:

$$S = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot w = \mu \cdot w \tag{5}$$

Die Einheit des Schubs entspricht der einer Kraft, somit: $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s^2} = \mathrm{N}$. Um mit der Rakete abheben zu können, muss also vom Betrag her stets $S > F_g$ gelten, wobei die Masse der Rakete m_R ständig pro Δt um Δm abnimmt. Die Fähigkeit einer Rakete, den Erdboden zu verlassen, hängt also von der Startmasse der Rakete, dem Treibstoffdurchsatz μ und der Ausströmgeschwindigkeit w ab. Die letzteren beiden Größen sind charakteristisch für die verschiedenen Triebwerke, die in der Raumfahrt benutzt werden.

Impuls und spezifischer Impuls

Rechnerisch ist der Impuls p nichts weiter als das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit.

$$p = m \cdot v \tag{6}$$

Physikalisch beschreibt der Impuls p den Bewegungszustand eines Objekts. Jede Änderung des Impulses Δp kann nur durch die Aufwendung einer Kraft erfolgen. Je länger sie wirkt, desto stärker verändert sich der Impuls. Umgekehrt geht die Ausübung einer Kraft durch ein sich bewegendes Objekt mit einer Änderung des Impulses einher. Es gilt daher:

$$\Delta p = F \cdot \Delta t \Leftrightarrow F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \tag{7}$$

In der Raketentechnik hat sich der Begriff des *spezifischen Impulses* I_sp eingebürgert. Hierunter versteht man den Impuls pro Massenelement des von einem Triebwerk ausgestoßenen Verbrennungsprodukts. Definiert ist er als das Produkt des über die Brenndauer τ gemittelten Schubs S geteilt durch die Masse des verbrannten Treibstoffs. Das Produkt aus dem Schub und der Brenndauer ist jedoch nichts anderes als der zeitlich gemittelte Impuls der ausströmenden Gases.

$$I_\mathrm{sp} = \frac{\bar{S} \cdot \tau}{m_\mathrm{treib}} \tag{8}$$

$$= \frac{\bar{p}}{m_\mathrm{treib}} \tag{9}$$

Die Einheit von I_sp ist somit m/s, also eine Geschwindigkeit. I_sp ist daher im wesentlichen nichts anderes als die Ausströmgeschwindigkeit w, die sich jedoch in der Praxis zeitlich ändert. Das erkennt man auch durch den Vergleich mit der Definition des Schubs in Gl. 5. Sowohl der Schub als auch der spezifische Impuls sind von der äußeren Druckbedingungen abhängig, da das Triebwerk gegen diesen Druck arbeitet. Deswegen steigen typischerweise S, I_sp und w mit zunehmender Höhe und abnehmendem atmosphärischem Druck.

Oft bezieht man den spezifischen Impuls nicht auf die Masse des Gases, sondern auf ihr Gewicht unter der Einwirkung der Erdbeschleunigung g. Die resultierende Einheit entspricht dann derjenigen der Zeit. Wir werden jedoch stets mit der Definition nach Gl. 8 arbeiten.

$$I^\star_\mathrm{sp} = \frac{\bar{S} \cdot \tau}{m_\mathrm{treib} \cdot g} \tag{10}$$

Raketengleichung

Die sogenannte Raketengleichung oder auch Ziolkowski-gleichung – benannt nach dem russischen Weltraumpionier Konstantin Ziolkowski, der diese Grundgleichung 1903 aufstellte – beschreibt die Bewegung einer einstufigen, kräftefreien Rakete. Sie lässt sich über zwei äquivalente Prinzipien herleiten – die Grundgleichung der Mechanik bzw. das 2. Newtonschen Axiom und die Impulserhaltung.

Aus der Grundgleichung der Mechanik lässt sich eine Bewegungsgleichung für das Verhalten einer Rakete mit dem Schub S nach Gl. 5 aufstellen.

$$F = m \cdot a \Leftrightarrow S = m_\mathrm{R} \cdot a_\mathrm{R} \tag{11}$$

In diesem Fall ist m_R von der Zeit t abhängig, denn mit der Zündung der Rakete verbrennt Treibstoff mit dem Durchsatz $\mu = \Delta m/\Delta t$. Wenn wir annehmen, dass S konstant ist (was in der Realität nicht stimmt) nimmt die Beschleunigung im Laufe der Zeit also zu. Somit kann man schreiben:

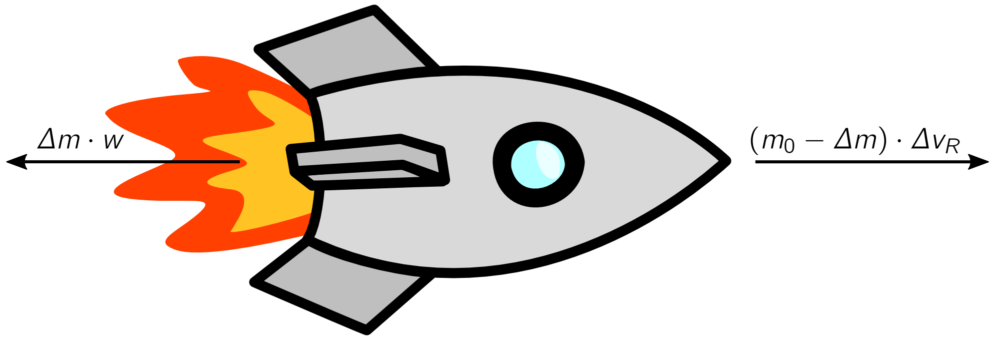
$$\mu \cdot w = (m_0 - \mu \cdot t) \cdot a_R(t) \tag{12}$$

Dabei ist m_0 die Masse der Rakete bei Brennbeginn. Für kleine Veränderungen von Δt können wir näherungsweise schreiben:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot w = (m_0 - \Delta m) \cdot \frac{\Delta v_R}{\Delta t} \tag{13}$$

$$\Leftrightarrow \Delta m \cdot w = (m_0 - \Delta m) \cdot \Delta v_R \tag{14}$$

$$\Leftrightarrow \Delta v_R = \frac{\Delta m}{m_0 - \Delta m} \cdot w \tag{15}$$



In Gl. 14 erkennt man die Impulserhaltung mit den Teilimpulsen des ausströmenden Gases und des Raketenkörpers. Für genügend kleine $\Delta m = \mu \cdot \Delta t$ kann man mit Hilfe von Gl. 15 die Geschwindigkeitsänderung der Rakete für bekannte Werte von μ und w berechnen. Da Δm für die gesamte Brenndauer jedoch sehr groß ist, muss man dazu den Brennvorgang in viele Einzelschritte unterteilen. Ist die Anzahl der Schritte groß genug, kann man die Endgeschwindigkeit mit ausreichender Genauigkeit bestimmen. Hierzu dienen die Aufgaben im Kapitel „Endgeschwindigkeit einer einstufigen Rakete“.

Diese Unterrichtsmaterialien sind im Rahmen des Projekts *Raum für Bildung* am Haus der Astronomie in Heidelberg entstanden. Weitere Materialien des Projekts finden Sie unter:

http://www.haus-der-astronomie.de/raum-fuer-bildung und http://www.dlr.de/next

Das Projekt findet in Kooperation mit dem Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt statt und wird von der Joachim Herz Stiftung gefördert.